

2024 级高二下学期定时练习

数学试题参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D; 2. A; 3. C; 4. B; 5. B; 6. C; 7. A; 8. D

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.

9. ABD; 10. BC; 11. ACD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. -2; 13. 14; 14. 12; 3.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分.

15. 解：(1) 连结 AE ，因为 $ABEF$ 为正方形，且 N 是 BF 的中点，

所以 N 也是 AE 的中点.2 分

又 M 是 AC 的中点，所以 $MN \parallel CE$4 分

又因为 $MN \not\subset$ 平面 BCE , $CE \subset$ 平面 BCE ,

所以 $MN \parallel$ 平面 BCE6 分

(2) 以 B 为原点，分别以 BA, BE, BC 所在直线为 x 轴， y

轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AB=2$ ，则 $B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,0,2), F(2,2,0), M(1,0,1), N(1,1,0)$7 分

故 $\overrightarrow{AC}=(-2,0,2), \overrightarrow{BF}=(2,2,0), \overrightarrow{MN}=(0,1,-1)$.

设平面 AMN 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$ ，由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC}=0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{MN}=0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$.

取 $z=1$ ，得平面 AMN 的一个法向量 $\vec{m}=(1,1,1)$9 分

设平面 BMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF}=0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}=0 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x+y=0 \\ y=z \end{cases}$.

取 $y=1$ ，得平面 BCC_1D_1 的一个法向量 $\vec{n}=(-1,1,1)$11 分

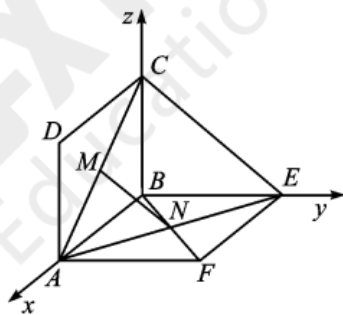
故 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$12 分

所以平面 MNA 与平面 MNB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$13 分

16. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q .

由 $b_1=a_1=1$ 及 $S_2=a_2$ ，得 $1+q=1+d$ ，即 $q=d$1 分

由 $b_1=a_1=1$ 及 $S_3=a_4$ ，得 $1+q+q^2=1+3d$ ，即 $3d=q+q^2$2 分



将 $d=q$ 代入, 得 $2q=q^2$. 因为 $q \neq 0$, 所以 $q=2$, 故 $d=2$4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$5 分

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$6 分

(2) 因为 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$, 所以 $T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$7 分

故 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}$8 分

两式错位相减, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^0} + 2(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^n}$9 分

$$= 1 + 2(1 - \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}. \quad \text{.....11 分}$$

故 $T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$12 分

因为 $\frac{2n+3}{2^n} > 0$, 所以 $T_n < 6 (n \in \mathbf{N}^*)$13 分

又 $T_5 = 6 - \frac{13}{16} > 5$, 故 $\lambda \geq 6$14 分

所以整数 λ 的最小值为 6.15 分

17. 解: (1) 由已知, 得 $a^2 + b^2 = 4^2$, 且 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$2 分

解得 $a=2, b=2\sqrt{3}$. 故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$4 分

(2) ①由已知, $A(-2, 0)$. 由 $|PA| = |PF|$ 知, 点 P 在线段 AF 的中垂线 $x=1$ 上.

又点 P 在 $l: y = \sqrt{3}x$ 上, 联立解得 $P(1, \sqrt{3})$6 分

易知 $\triangle APF$ 的外接圆圆心 M 也在线段 AF 的中垂线 $x=1$ 上.

设 $N(1, 0)$, 连接 PN 并延长 PN 交 $\triangle APF$ 的外接圆 M 于 Q , 连接 QF .

在 $Rt\triangle PFQ$ 中, $PF \perp QF$, 且 $FN \perp PQ$. 由射影定理有

$$|PF|^2 = |PN| \cdot |PQ| = |PN| \cdot 2|PM|. \text{ 即 } 12 = \sqrt{3} \cdot 2|PM|.$$

解得 $|PM| = 2\sqrt{3}$, 故 $M(1, -\sqrt{3})$8 分

所以 $\triangle APF$ 的外接圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 12$10 分

②直线 AP 的斜率 $k_1 = \frac{\sqrt{3}-0}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故其方程为 $x = \sqrt{3}y - 2$11 分

代入 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, 得 $3(\sqrt{3}y-2)^2 - y^2 = 12$, 解得 $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ($y=0$ 舍去).12 分

故 $x = \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{5}{2}$, 所以 $B(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$13 分

故直线 PB 的斜率 $k_2 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{5}{2} - 1} = -\sqrt{3}$14 分

因为 $k_1 \cdot k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3}) = -1$, 所以 $\angle ABF = 90^\circ$15 分

18. 解：(1) 设样本空间为 Ω , 事件 $D = \text{“2 个新球不相邻”}$.

$$\text{因为 } n(\Omega) = A_5^5 = 120, \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{且 } n(D) = A_3^3 A_4^2 = 72, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P(D) = \frac{72}{120} = 0.6. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由题意, $X = 0, 1, 2$.

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = 0.3; \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = 0.6; \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = 0.1; \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

X	0	1	2
P	0.3	0.6	0.1

所以 X 的分布列为(见右表) $\dots\dots 9 \text{ 分}$

故随机变量 X 的期望 $E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.1 = 0.8$. $\dots\dots 11 \text{ 分}$

(3) 法一: 设事件 A_i, B_i 分别表示“第一、二次训练时取到 i 个新球, $i = 0, 1, 2$ ”, 事件 C 表示“第二次训练结束后, 盒中至少还有 1 个新球”, 则 $C = A_0 B_0 + A_1 B_0 + A_0 B_1$. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$P(A_0 B_0) = P(A_0) \cdot P(A_0 B_0 | A_0) = 0.3^2 = 0.09; \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$P(A_1 B_0) = P(A_1) \cdot P(A_1 B_0 | A_1) = 0.6 \times \frac{C_4^2}{C_5^2} = 0.6 \times 0.6 = 0.36; \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$P(A_0 B_1) = P(A_0) \cdot P(A_0 B_1 | A_0) = 0.3 \times \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = 0.3 \times 0.6 = 0.18; \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

因为 $A_0 B_0, A_1 B_0, A_0 B_1$ 互斥, 所以 $P(C) = 0.09 + 0.36 + 0.18 = 0.63$. $\dots\dots 17 \text{ 分}$

法二: 设事件 A_i, B_i 分别表示“第一、二次训练时取到 i 个新球, $i = 0, 1, 2$ ”, 事件 C 表示“第二次训练结束后, 盒中全是旧球”, 则 $C = A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2$. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

因为 $P(A_0) = P(X=0) = 0.3, P(A_0 B_2 | A_0) = P(X=2) = 0.1$.

$$\text{所以 } P(A_0 B_2) = P(A_0) \cdot P(A_0 B_2 | A_0) = 0.3 \times 0.1 = 0.03. \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } P(A_1 B_1 | A_1) = \frac{C_1^1 C_4^1}{C_5^2} = 0.4.$$

$$\text{所以 } P(A_1 B_1) = P(A_1) \cdot P(A_1 B_1 | A_1) = P(X=1) \times 0.4 = 0.6 \times 0.4 = 0.24.$$

$\dots\dots 14 \text{ 分}$

$$\text{又 } P(A_2) = P(X=2) = 0.1.$$

$$\text{由全概率公式得, } P(C) = 0.03 + 0.24 + 0.1 = 0.37. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

因为“第二次训练结束后, 盒中至少还有 1 个新球”为 C 的对立事件 $\bar{C}$, 所以 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.37 = 0.63$, 即为所求. $\dots\dots 17 \text{ 分}$

19. 解：(1)求导，得 $f'(x)=1+\ln x-2ax$ ，故 $f'(1)=1-2a$1 分

因为 $f(1)=b-a$ ，所以切线 l 的方程为 $y-b+a=(1-2a)(x-1)$2 分

令 $x=0$ ，得 l 在 y 轴上的截距 $y=a+b-1$3 分

由已知， $a+b-1=a$ ，解得 $b=1$4 分

(2)因为 $x>0$ ，所以 $x+f(x)<1$ 等价于 $a>\frac{1+\ln x}{x}$5 分

设函数 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ ，则 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$6 分

当 $0<x<1$ 时， $g'(x)>0$ ；当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$7 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.8 分

故 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=1$9 分

所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$10 分

(3)①当 $a\leq 0$ 时，因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 不存在极大值点（至多存在极小值点），故 $f(x)$ 不存在最大值，不合题意.11 分

②当 $a\geq \frac{1}{2}$ 时，由(2)知， $f'(x)=x[g(x)-2a]\leq x(1-2a)\leq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 不存在最大值，不合题意.12 分

③当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由(2)知， $1+\ln x<x(x>1)$ ，故 $f'(\frac{1}{a^2})=1+2(\ln \frac{1}{a}-\frac{1}{a})<1-2<0$13 分

又 $f'(\frac{1}{e})=-\frac{2a}{e}<0$ ， $f'(\frac{1}{2a})=-\ln(2a)>0$13 分

由零点存在定理知，存在 $x_1\in(\frac{1}{e},\frac{1}{2a})$ ， $x_2\in(\frac{1}{2a},\frac{1}{a^2})$ ，使得 $f'(x_i)=0(i=1,2)$.

且当 $0<x<x_1$ ，或 $x>x_2$ 时， $f'(x)<0$ ；当 $x_1<x<x_2$ 时， $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增. 故 $x=x_2$ 是 $f(x)$ 的极大值点.14 分

当 $x\rightarrow 0^+$ 时， $f(x)\rightarrow 1^-$ ，要使 $f(x_2)$ 成为最大值，必有 $f(x_2)=x_2\ln x_2-ax_2^2+1\geq 1$. 由 $f'(x_2)=0$ ，得 $1+\ln x_2=2ax_2$. 所以 $2x_2\ln x_2\geq x_2(1+\ln x_2)$ ，解得 $x_2\geq e$15 分

由(2)知， $g(x_2)\leq g(e)=\frac{2}{e}$. 故 $2a=g(x_2)\leq \frac{2}{e}$ ，解得 $a\leq \frac{1}{e}$16 分

综上所述， a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e}]$17 分