高 2023 级高三质量监测试题

数 学参考答案及评分意见

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度．可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	A	B	D	D	A	C	C	B	ACD	BC	ABD

二、填空题：

12. $\frac{\pi}{3}$；　　　13. -4；　　　14. $\frac{16\pi}{3}$.

三、解答题：

15. 解：（1）因为 $2b\cos C=2a+c$，

所以 $2\sin B\cos C=2\sin A+\sin C$，①……………………2 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，②……………………4 分

将②代入①整理得：$\sin C=-2\cos B\sin C$，……………………5 分

因为 $\sin C>0$，所以 $1=-2\cos B$，即 $\cos B=-\frac{1}{2}$，……………………6 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=120^\circ$；……………………7 分

（2）由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，……………………8 分

将 $B=120^\circ$，$a=1$，$b=\sqrt{7}$ 代入整理得：

$c^2+c-6=0$，……………………10 分

解得 $c=2$，或 -3（舍去），……………………11 分

因为 $\frac{1}{2}\times b\times BD=\frac{1}{2}ac\sin B$，……………………12 分

所以 $BD=\frac{\sqrt{21}}{7}$.……………………13 分

16. 解：（1）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=(x^2-x-1)e^x$，……1 分

$f'(x)=(x^2+x-2)e^x=(x-1)(x+2)e^x$，……3 分

令 $f'(x)>0$，解得：$x<-2$，或 $x>1$，……4 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减，……6 分

所以 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=-e$；……7 分

（2）函数 $f'(x)=[ax^2+(2a-1)x-2]e^x=(ax-1)(x+2)e^x$，……9 分

因为 $x>0$，$a>0$，令 $f'(x)>0$ 解得，$x>\frac{1}{a}$，……10 分

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上为增函数，在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，……12 分

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{a})=-e^{\frac{1}{a}}$，……13 分

由 $-e^{\frac{1}{a}}\geqslant -e$ 解得：$a\geqslant 1$，

所以 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$．……15 分

17. 证明：（1）连结 FD 交 AE 于点 G，连结 MG，……1 分

因为四边形 $ADEF$ 为平行四边形，

所以 G 是 FD 中点，……3 分

因为 BD // 平面 AME，

$BD\subset$ 平面 FBD，平面 $FBD\cap$ 平面 $AME=MG$，

所以 $BD//MG$，……5 分

又因为 G 是 FD 中点，

所以 $MB=MF$；……6 分

解：（2）因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB\perp AD$，所以 $AB\perp$ 平面 $ADEF$，

设 $AB=n$，平行四边形 $ADEF$ 中，$\angle FAD=120°$，所以 $\angle AFE=60°$，M 是 BF 中点，

$V_{M-AEF}=\frac{1}{2}V_{B-AEF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\times AB$，

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times FA\times FE\cdot\sin 60^\circ\times n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times n=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

解得 $n=2$，…………………………………………………………………………7 分

因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，过点 A 作直线 $AH\perp AD$

交 EF 于点 H，所以 $AH\perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $\angle FAD=120^\circ$，所以 $\angle HAF=30^\circ$，

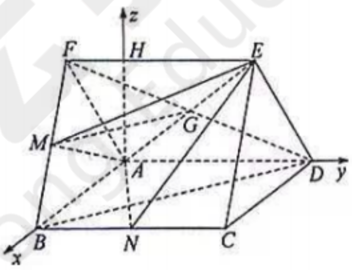
因为 $AF=2$，所以 $FH=1$，$AH=\sqrt{3}$，…………………………………………8 分

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$F(0,-1,\sqrt{3})$，$M(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$N(2,2,0)$，

$\overrightarrow{AM}=(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AE}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AF}=(0,-1,\sqrt{3})$，设平面 AME 的一个法向量为

$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，……………………………………………9 分



则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=x_1-\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=3y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=1$，则 $x_1=2$，$z_1=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,-\sqrt{3})$，…………………………………………………… 11 分

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AN}=(2,2,0)$，

设平面 NAE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3y_2+\sqrt{3}z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=2x_2+2y_2=0\end{cases}$，

令 $y_2=-1$，则 $z_2=\sqrt{3}$，$x_2=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,\sqrt{3})$，……………………13 分

设平面 MAE 与平面 NAE 的夹角为 θ，则：

$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|4-2-6|}{\sqrt{16+4+12}\cdot\sqrt{1+1+3}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以平面 MAE 与平面 NAE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．……………………15 分

18．解：(1)如图所示，因为 $F(2,0)$ 为 C 的右焦点，则 $c=2$，且双曲线的左焦点为 $F_1(-2,0)$，

所以 $|PF|-|PF_1|=-\sqrt{(-2-2)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}-0)^2}-\sqrt{[-2-(-2)]^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}-0)^2}=2\sqrt{3}$，……1 分

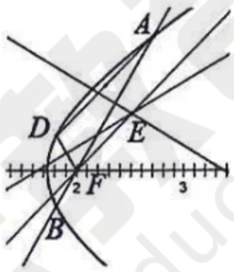
所以 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=1$，……………………………………………………3 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$；………………………………………………4 分

(2)（i）设直线 AB 方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_2,-y_2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\ x=my+2,\end{cases}$ 消去 x 得：$(m^2-3)y^2+4my+1=0$，……………………………6 分

$\begin{cases}\Delta=16m^2-4(m^2-3)=12m^2+12>0,\\ y_1y_2<0,\end{cases}$ 所以 $0<m^2<3$，



$y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2-3}$，$y_1y_2=\frac{1}{m^2-3}$，

因为点 D 到直线 AF 的距离为：$d=\frac{|x_2+my_2-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2my_2|}{\sqrt{m^2+1}}$，

$|AF|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1|$，

所以 $S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}d|AF|=|my_1y_2|=\left|\frac{m}{m^2-3}\right|=2$，……………………………………8 分

解得：$m^2=\frac{9}{4}$ 或 $m^2=4$（舍去），

所以 $m=\pm\frac{3}{2}$，

所以直线 AB 的方程为 $2x-3y-4=0$ 或 $2x+3y-4=0$；……………………………10 分

（ii）证明：因为 AF 的垂直平分线方程为 $y-\frac{y_1}{2}=-\frac{x_1-2}{y_1}(x-\frac{x_1+2}{2})$，……………………11 分

即 $y=-mx+2y_1-\frac{1}{2y_1}$，　　　　①

同理 DF 的垂直平分线方程为 $y=mx-2y_2+\frac{1}{2y_2}$，②

联立①②解得：$E(2+\frac{(1+m^2)(y_1+y_2)}{4m},-\frac{(1+m^2)(y_2-y_1)}{4})$，……………………12 分

所以 $k_{EF}=\frac{-\frac{(1+m^2)(y_2-y_1)}{4}}{\frac{(1+m^2)(y_1+y_2)}{4m}}=\frac{-m(y_2-y_1)}{(y_1+y_2)}$，……………………………………13 分

又因为$k_{AD}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}$，……………………………………15分

所以$k_{EF}\cdot k_{AD}=\dfrac{-m(y_2-y_1)}{(y_1+y_2)}\cdot\dfrac{-(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}=1$，

所以直线EF与直线AD的斜率之积是定值1．……………………………………17分

19．解：(1)$P(X_2=2)=\dfrac{20}{25}=\dfrac{4}{5}$；……………………………………3分

(2)（i）因为$P(M_i=5)=\dfrac{1}{5^i}$，$P(M_i=4)=\dfrac{2^i-1}{5^i}$，……………………………………5分

所以$P(M_i\geqslant 4)=(\dfrac{2}{5})^i$，

因为$(\dfrac{2}{5})^i\leqslant 0.1$，且$i\in\mathbf{N}^*$，解得：$i\geqslant 3$，……………………………………6分

所以i的最小值为3；……………………………………7分

（ii）M_i的所有取值为1，2，3，4，5，

$P(M_i=5)=\dfrac{1}{5^i}$，$P(M_i=4)=\dfrac{2^i-1}{5^i}$，$P(M_i=3)=\dfrac{3^i-2^i}{5^i}$，

$P(M_i=2)=\dfrac{4^i-3^i}{5^i}$，$P(M_i=1)=\dfrac{5^i-4^i}{5^i}$，

所以$E(M_i)=\dfrac{5^i+4^i+3^i+2^i+1}{5^i}$，……………………………………9分

N_i的所有取值为1，2，3，4，5，

$P(N_i=1)=\dfrac{1}{5^i}$，$P(N_i=2)=\dfrac{2^i-1}{5^i}$，$P(N_i=3)=\dfrac{3^i-2^i}{5^i}$，

$P(N_i=4)=\dfrac{4^i-3^i}{5^i}$，$P(N_i=5)=\dfrac{5^i-4^i}{5^i}$，

所以$E(N_i)=\dfrac{5\times5^i-4^i-3^i-2^i-1}{5^i}$，……………………………………11分

所以$E(M_i)+E(N_i)=6$，……………………………………12分

下面求$E(X_i)$：

方法一：当$i\geqslant 5$时，X_i的所有取值为1，2，3，4，5，

$P(X_i=1)=\dfrac{C_5^1\times1^i}{5^i}=\dfrac{5}{5^i}$，

$P(X_i=2)=\dfrac{C_5^2\times(2^i-2)}{5^i}=\dfrac{10\times2^i-20}{5^i}$，

$P(X_i=3)=\dfrac{C_5^3\times(3^i-C_3^2\times(2^i-2)-C_3^1)}{5^i}=\dfrac{10\times3^i-30\times2^i+30}{5^i}$，

$$P(X_i=4)=\frac{C_5^4\times(4^i-C_4^3\times(3^i-C_3^2(2^i-2)-C_3^1)-C_4^2\times(2^i-2)-C_4^1)}{5^i}$$

$$=\frac{5\times4^i-20\times3^i+30\times2^i-20}{5^i},$$

$$P(X_i=5)=\frac{5^i-C_5^4(4^i-C_4^3\times(3^i-C_3^2(2^i-2)-C_3^1)-C_4^2\times(2^i-2)-C_4^1)-C_5^3\times(3^i-C_3^2(2^i-2)-C_3^1)-C_5^2\times(2^i-2)-C_5^1}{5^i}$$

$$=\frac{5^i-5\times4^i+10\times3^i-10\times2^i+5}{5^i},$$

所以 $E(X_i)=\dfrac{5\times5^i-5\times4^i}{5^i}=5-5\times(\dfrac{4}{5})^i$，

显然当 $i=1$，2，3，4 时，上式也成立；……………………………………………15 分

方法二：记 $P_{i,j}$ $(i\in\mathbf{N}^*,j=1,2,3,4,5)$ 为 $X_i=j$ 的概率，易知 $P_{i,j}=\dfrac{6-j}{5}P_{i-1,j-1}+\dfrac{j}{5}P_{i-1,j}$

所以 $E(X_i)=P_{i,1}+2P_{i,2}+3P_{i,3}+4P_{i,4}+5p_{i,5}$

$$=\frac{1}{5}P_{i-1,1}+2(\frac{4}{5}P_{i-1,1}+\frac{2}{5}P_{i-1,2})+3(\frac{3}{5}P_{i-1,2}+\frac{3}{5}P_{i-1,3})+4(\frac{2}{5}P_{i-1,3}+\frac{4}{5}P_{i-1,4})+5(\frac{1}{5}P_{i-1,4}+\frac{5}{5}P_{i-1,5})$$

$$=\frac{9}{5}P_{i-1,1}+\frac{13}{5}P_{i-1,2}+\frac{17}{5}P_{i-1,3}+\frac{21}{5}P_{i-1,4}+\frac{25}{5}P_{i-1,5}$$

$$=(P_{i-1,1}+P_{i-1,2}+P_{i-1,3}+P_{i-1,4}+P_{i-1,5})+\frac{4}{5}(P_{i-1,1}+2P_{i-1,2}+3P_{i-1,3}+4P_{i-1,4}+5P_{i-1,5})$$

$$=1+\frac{4}{5}E(X_{i-1}),$$

处理可得 $E(X_i)-5=\dfrac{4}{5}(E(X_{i-1})-5)$，即数列 $\{E(X_i)-5\}$ 为等比数列，注意到 $E(X_1)=1$，

所以 $E(X_i)=5-5\times(\dfrac{4}{5})^i$．……………………………………………………15 分

假设 $E(M_i)$，$mE(X_i)$，$E(N_i)$ 成等差数列，则 $2mE(X_i)=6$，

整理得 $m(5^i-4^i)=3\times5^{i-1}$，

因为 5^i-4^i 与 5^{i-1} 互质，所以 5^i-4^i 必须整除 3，

即 $5^i-4^i=1$ 或者 $5^i-4^i=3$，

因为 $(5^{i+1}-4^{i+1})-(5^i-4^i)=4\times5^i-3\times4^i>4\times5^i-4\times4^i>0$，

所以数列 $\{5^i-4^i\}$ 是递增数列，

又因为 $5-4=1$，$5^2-4^2=9>3$，

所以 $i=1$，此时 $m=3$，从而 m 有唯一解 3．……………………………………17 分