高 2023 级高三质量监测试题

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|\ x(x-3)<0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 z 的共轭复数为

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$　　D. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $2a_4=a_3+5$，$a_8=11$，则其公差为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则其长轴长为

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

5. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+x-1$，则 $f(\ln\dfrac{1}{2})$ 的值是

A. $-1-\ln 2$　　B. $1-\ln 2$　　C. $\ln 2-1$　　D. $\ln 2+1$

6. 已知$\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

7. 某 AI 导航机器人团队，调研 5 组不同避障阈值 x（单位：灵敏度）与路径规划耗时 y（单位：ms）得到的数据如下表：

避障阈值 x	9	9.5	10	10.5	11
规划耗时 y	11	n	8	6	5

由表中数据可知，规划耗时 y 与避障阈值 x 之间存在较强的线性相关关系，其经验回归方程是$\hat{y}=-3.2x+40$，则规划耗时数据 5，6，8，n，11 的第 75 百分位数为

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 10.5

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+a, x\leqslant 1\\ -\ln x+2, x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=b(b\in\mathbf{R})$ 恒有解，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,4]$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,0]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的最小正周期为π，则

A. $\omega=2$　　B. $f(\frac{3\pi}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 对称　　D. $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

10. 若 P 是正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 上的动点（包括端点），则

A. 存在点 P，使得 $AP\perp$ 平面 BB_1C_1C

B. 直线 AP 与 DD_1 异面

C. 平面 $PAC\perp$ 平面 BDD_1B_1

D. 若 $PB=PB_1$，则平面 DA_1C_1 // 平面 PAC

11. 设抛物线 C_1：$y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 在 C_1 上，点 Q 在圆 C_2：$(x-3)^2+y^2=1$ 上，则

A. $|PF|+|PC_2|$ 的最小值为 4

B. 对任意点 Q，总存在两点 P 满足 $|PF|=|PQ|$

C. 若直线 FQ 与 C_2 相切，则 FQ 被 C_1 所截得的弦长为 8

D. $\angle FPC_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$ ，则 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为__________.

13. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_2+a_2=0$ ，$S_4=5$ ，则 a_n 的最小值为__________.

14. 已知圆台的下底面半径是上底面半径的 2 倍，母线长为 6，若一个球与该圆台的上下底面和侧面均相切，则球与圆台的侧面切点所形成的曲线的长为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A ，B ，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b\cos C=2a+c$.

（1）求 B ；

（2）已知 $a=1$ ，$b=\sqrt{7}$ ，求 AC 边上的高.

16. (15 分)

已知函数 $f(x)=(ax^2-x-1)e^x$ ，其中 $a>0$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

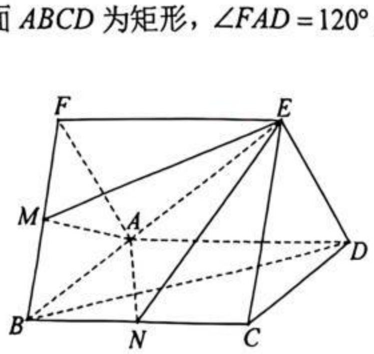
（2）当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant -e$ 恒成立，求 a 的取值范围.

17. (15 分)

如图，在三棱柱 $ABF-DCE$ 中，侧面 $ADEF\perp$ 侧面 $ABCD$ ，侧面 $ABCD$ 为矩形，$\angle FAD=120°$ ，$AD=2AF=4$ ，点 M 在棱 FB 上，且 $BD//$ 平面 AME .

（1）求证：$MB=MF$ ；

（2）若三棱锥 $M-AEF$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，点 N 为 BC 的中点，求平面 MAE 与平面 NAE 夹角的余弦值.



18．(17 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $P(-2,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，$F(2,0)$ 为 C 的右焦点．

（1）求 C 的标准方程；

（2）过点 F 的直线 l 与 C 的右支交于 A，B 两点，设点 B 关于 x 轴的对称点为 D．

（i）已知 $S_{\triangle ADF}=2$，求 l 的方程；

（ii）设 $\triangle ADF$ 的外接圆圆心为 E，证明：直线 EF 的斜率与 AD 的斜率之积为定值．

19．(17 分)

在一个盒子中，装有 5 个大小相同的小球，小球上的编号依次为 1，2，3，4，5，现从中有放回地依次随机抽取小球若干次，每次仅抽取 1 个小球并记录小球上的编号．记 X_i 为第 i 次抽取后出现的编号种类数（例如，依次抽取 3 次，小球编号分别为 3，3，1，于是 $X_3=2$）．

（1）求 $X_2=2$ 的概率；

（2）记 M_i 为第 i 次抽取后出现的编号中的最小编号，N_i 为第 i 次抽取后出现的编号中的最大编号．

（i）若 $M_i\geqslant 4$ 的概率不超过 0.1，求 i 的最小值；

（ii）设 M_i，X_i，N_i 的数学期望分别为 $E(M_i)$，$E(X_i)$，$E(N_i)$，探究是否存在正整数 i 和正整数 m，使得 $E(M_i)$，$mE(X_i)$，$E(N_i)$ 成等差数列．若存在，求出所有满足条件的 m 的值；若不存在，请说明理由．