高三年级适应性练习

数学参考答案及评分标准

一.单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	B	B	C	D

二.多项选择题(本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的四个选项中,有几项是符合题目要求的.)

题号	9	10	11
答案	ACD	ABD	ACD

三.填空题(本题共3小题,每小题5分,共15分)

12. 45　　13. -2　　14. $\frac{3}{5}$

四.解答题(共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15.解:(1)由题意,根据等高堆积条形图,完成2×2列联表如下:

性别	是否喜欢人工智能应用		合计
	是	否	
男生	75	25	100
女生	55	45	100
合计	130	70	200

零假设为H_0:该校学生的性别与是否喜欢AI应用没有关联,

因为$\chi^2=\dfrac{200(75\times45-55\times25)^2}{100\times100\times130\times70}\approx8.791>6.635=x_{0.010}$,

所以依据小概率值$\alpha=0.010$的独立性检验,我们推断H_0不成立,即能认为该校学生的性别与喜欢人工智能应用有关联　……………………………………7分

(2)设事件A为“抽取的学生为女生”,事件B为“抽取的学生喜欢AI应用”.

由题意有 $P(A)=\frac{5}{9}$, $P(\bar{A})=\frac{4}{9}$

样本中男生喜欢AI应用的频率为0.75,女生喜欢AI应用的频率为0.55,以此作为概率:

则 $P(B|A)=0.55$, $P(B|\bar{A})=0.75$ ……………………………………9分

由全概率公式:

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{5}{9}\times 0.55+\frac{4}{9}\times 0.75=\frac{23}{36}$ …………11分

由贝叶斯公式有 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}\times 0.55}{\frac{23}{36}}=\frac{11}{23}$.

所以该生为女生的概率为 $\frac{11}{23}$ ……………………………………13分

16.解:(1)由 $a_1=\frac{4}{3}$, $a_{n+1}=\frac{2}{3-a_n}$ 得: $a_2=\frac{6}{5}$, $a_3=\frac{10}{9}$ ……………………3分

(2) $a_{n+1}-1=\frac{2}{3-a_n}-1=\frac{a_n-1}{3-a_n}$, $2-a_{n+1}=2-\frac{2}{3-a_n}=\frac{4-2a_n}{3-a_n}$,

所以 $\frac{2-a_{n+1}}{a_{n+1}-1}=2\times\frac{2-a_n}{a_n-1}$, 即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$, 且 $b_1=\frac{2-a_1}{a_1-1}=2\neq 0$.

故数列 $\{b_n\}$ 是以2为首项,2为公比的等比数列 ……………………9分

(3)由(2)知: $\frac{2-a_n}{a_n-1}=2^n$, 所以 $a_n=\frac{1}{2^n+1}+1$.

所以 $c_n=(a_{n+1}-1)(2-a_n)=\frac{1}{2^{n+1}+1}\times\left(1-\frac{1}{2^n+1}\right)=\frac{2^n}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$.

所以 $S_n=\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$

……………………………………………………………………15分

17.解:(1)由题意 $P_1O_1\perp$ 平面 $ABCD$、$P_2O_2\perp$ 平面 $ABCD$

所以 $P_1O_1 /\!/ P_2O_2$ 且 $P_1O_1=P_2O_2$,故四边形 $P_1O_1O_2P_2$ 是平行四边形.

故 $P_1P_2 /\!/ O_1O_2$ 且 $P_1P_2=O_1O_2$, O_1, O_2 分别为 AB, CD 的中点,

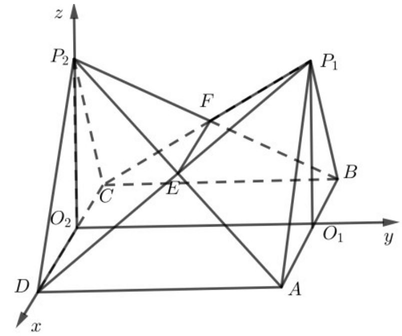
所以 $P_1P_2 /\!/ AD$ 且 $P_1P_2=AD$ 即四边形 P_1ADP_2 是平行四边形.

所以 E 为 P_2A 的中点,同理 F 为 P_2B 的中点,故 $EF /\!/ AB$,

且 $EF\not\subseteq$ 平面 $ABCD$, $AB\subseteq$ 平面 $ABCD$

所以 $EF /\!/$ 平面 $ABCD$ ……………………………………5分

(2)由题意可知：O_2D,O_2O_1,O_2P_2两两垂直，以O_2为原点，以$\overrightarrow{O_2D},\overrightarrow{O_2O_1},\overrightarrow{O_2P_2}$的方向为$x,y,z$轴的正方向建立空间直角坐标系$O_2-xyz$，如图所示，



则$D(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$P_1\left(0,2,\sqrt{3}\right)$，$A(1,2,0)$，$B(-1,2,0)$，$P_2\left(0,0,\sqrt{3}\right)$ ……7分

设平面P_1CD的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{P_1C}=(x,y,z)\cdot\left(-1,-2,-\sqrt{3}\right)=-x-2y-\sqrt{3}z=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{P_1D}=(x,y,z)\cdot\left(1,-2,-\sqrt{3}\right)=x-2y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$

取$\vec{m}=\left(0,\sqrt{3},-2\right)$.

设平面P_2AB的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_2A}=(a,b,c)\cdot\left(1,2,-\sqrt{3}\right)=a+2b-\sqrt{3}c=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_2B}=(a,b,c)\cdot\left(-1,2,-\sqrt{3}\right)=-a+2b-\sqrt{3}c=0\end{cases}$

取$\vec{n}=\left(0,\sqrt{3},2\right)$. ……………………………………………………………9分

所以$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=-\dfrac{1}{7}$.

故二面角$A-EF-C$的平面角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ ………………………………11分

(3)设多面体$ABCDEF$外接球的球心为G，因为G到A、B、C、D四点距离相等

故G的坐标可设为$(0,1,t)$，所以只要$|GA|=|GE|$即可.

由(2)知$E\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以外接球半径$r=\sqrt{t^2+2}=\sqrt{\left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$

解得$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故$r^2=\dfrac{7}{3}$.

所以多面体$ABCDEF$外接球的面积为$\dfrac{28\pi}{3}$ ………………………………15分

18.解：(1)当$a=1$时，$f(x)=e^{x+1}-\ln x+1$，所以$f'(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x}$

故$f'(1)=e^2-1$，函数$f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y-e^2-1=(e^2-1)(x-1)$.

整理得：$y=(e^2-1)x+2$ ……………………………………………………4分

(2)若$a<0$，当$x\to 0^-$时，$f(x)\to-\infty$，所以$f(x)\geqslant 0$不恒成立 ………………5分

若$a>0$，$f'(x)=e^{x+1}-\frac{a}{x}(x>0)$，易知$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单增

且$f'(a)=e^{a+1}-1>0$，当$x\to 0^+$时，$f'(x)\to-\infty$

所以$\exists x_0\in(0,+\infty)$使得$f'(x_0)=e^{x_0+1}-\frac{a}{x_0}=0$即$a=x_0e^{x_0+1}$

且$f(x)$在$(0,x_0)$上单减，在$(x_0,+\infty)$上单增，

所以$f(x)\geqslant f(x_0)$，要使$f(x)\geqslant 0$恒成立，只要$f(x_0)\geqslant 0$即可 ………………7分

由$f(x_0)=e^{x_0+1}-a\ln(ax_0)+a=e^{x_0+1}-a\ln a-a\ln x_0+a$且$a=x_0e^{x_0+1}$

所以$f(x_0)=\frac{a}{x_0}-a\ln a-a\ln x_0+a\geqslant 0$，即$\frac{1}{x_0}-\ln a-\ln x_0+1\geqslant 0$，

由$a=x_0e^{x_0+1}$有$\ln a=\ln x_0+x_0+1$带入上式有：$2\ln x_0+x_0-\frac{1}{x_0}\leqslant 0$ ……………9分

令$g(x_0)=2\ln x_0+x_0-\frac{1}{x_0}$，则$g'(x_0)=\frac{2}{x_0}+1+\frac{1}{x_0^2}=\frac{(x_0+1)^2}{x_0^2}>0$

所以$g(x_0)$在$(0,+\infty)$单增且$g(1)=0$，故要使$g(x_0)\leqslant 0=g(1)$，必有$x_0\in(0,1]$.

又$a=x_0e^{x_0+1}$在$(0,1]$单增，所以a的取值范围为$(0,e^2]$ ………………………13分

(3)由(2)知当$a=e^2$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立，即$e^{x+1}-e^2\ln(e^2x)+e^2\geqslant 0$

化简得：$e^{x-1}\geqslant\ln x+1$，令$x=k(k=1,2,3,\cdots,n)$

有$e^{k-1}\geqslant\ln k+1(k=1,2,3,\cdots,n)$

将这n个同向不等式相加得：$e^0+e^1+\cdots+e^{n-1}\geqslant\ln 1+1+\ln 2+1+\cdots+\ln n+1$

整理得：$\frac{1-e^n}{1-e}\geqslant\ln(n!)+n$，即所证不等式成立 …………………………………17分

19.解：(1)由题意得：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ ab=2\end{cases}$，解得：$a=2,b=1$.

所求椭圆为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………………………………………4分

(2)设$P(x_0,y_0)$，则$\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，

则以P为圆心PO为半径的圆的方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x_0^2+y_0^2$，

即 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y=0$

以 $F\left(-\sqrt{3},0\right)$ 为圆心半径为 r 的圆的方程为 $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+y^2=r^2$.

所以公共弦为 MN 的方程为：$\left(2x_0+2\sqrt{3}\right)x+2y_0y+3-r^2=0$ ……………………8分

那么 F 到 MN 的距离 $d=\dfrac{\left|-\sqrt{3}\left(2x_0+2\sqrt{3}\right)+3-r^2\right|}{\sqrt{\left(2x_0+2\sqrt{3}\right)^2+(2y_0)^2}}=\dfrac{\left|-2\sqrt{3}x_0-3-r^2\right|}{\sqrt{\left(2x_0+2\sqrt{3}\right)^2+4-x_0^2}}=$

$\dfrac{\left|-2\sqrt{3}x_0-3-r^2\right|}{\sqrt{3x_0^2+8\sqrt{3}x_0+16}}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}x_0+3+r^2\right|}{\left|\sqrt{3}x_0+4\right|}$ ……………………………………………………10分

要使得 ΔFMN 的面积为定值（与点 P 无关），只需 $d=\dfrac{\left|2\sqrt{3}x_0+3+r^2\right|}{\left|\sqrt{3}x_0+4\right|}$ 与 x_0 无关，

所以 $3+r^2=8$，即 $r=\sqrt{5}$.

此时 $d=2$，所以 $MN=2\sqrt{r^2-d^2}=2$，故 ΔFMN 的面积为2 ………………………13分

（3）以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意点 P 为圆心，PO 为半径的圆与以椭圆焦点 F 为圆心半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆的公共弦为 MN，则 ΔFMN 的面积为定值 ab ……………17分