

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

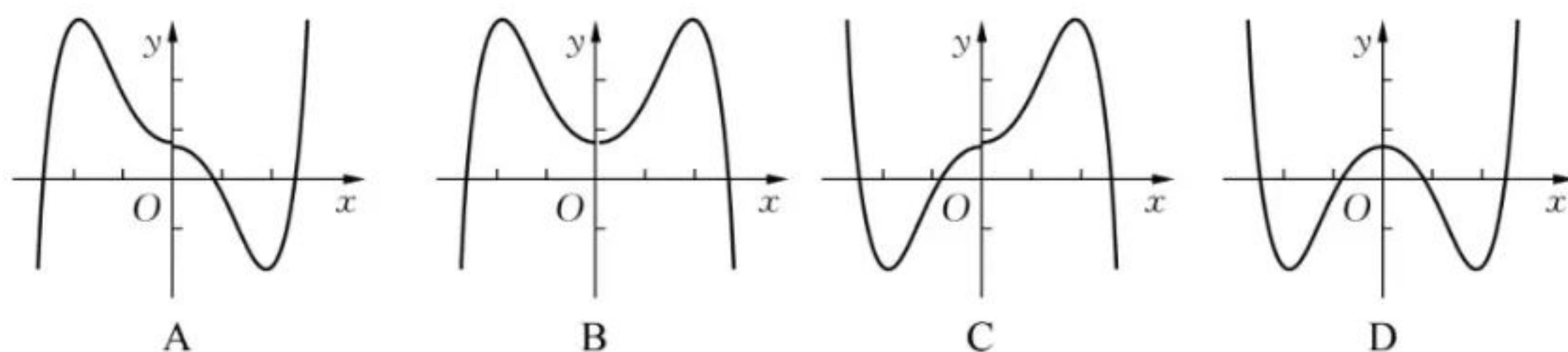
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid x + 1 \in A\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{1, 2, 3, 4\}$
 - B. $\{1, 2, 3, 4\}$
 - C. $\{1, 2, 3, 4\}$
 - D. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设 $z = \sqrt{2}i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$
 - A. 2
 - B. 2
 - C. 2
 - D. 2
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \\ 2x + 6y - 9 \leq 0, \end{cases}$, 则 $z = x - 5y$ 的最小值为
 - A. 5
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. -2
 - D. $-\frac{7}{2}$
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 1, a_3 + a_7 =$
 - A. -2
 - B. $\frac{7}{3}$
 - C. 1
 - D. $\frac{2}{9}$
5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列, 丙不在排头, 且甲或乙在排尾的概率是
 - A. $\frac{1}{4}$
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{2}{3}$
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$, 且经过点 $P(-6, 4)$, 则双曲线 C 的离心率是
 - A. $\frac{13}{5}$
 - B. $\frac{13}{7}$
 - C. 2
 - D. 3
7. 曲线 $f(x) = x^6 + 3x$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为
 - A. $\frac{1}{6}$
 - B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 函数 $y = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的图象大致为



9. 已知 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

A. $2\sqrt{3} + 1$

B. $2\sqrt{3} - 1$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $1 - \sqrt{3}$

10. 直线过圆心,直径

11. 已知已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面: ①若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$; ②

若 $\alpha \cap \beta = m, m \parallel n$, 则 $n \parallel \beta$; ③若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha, m$ 与 n 可能异面, 也可能相交, 也可能平行;

④若 $\alpha \cap \beta = m, n$ 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$, 以上命题是真命题的是

A. ①③

B. ②③

C. ①②③

D. ①③④

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}, \omega^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$

A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

B. $\frac{\sqrt{39}}{13}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 略

14. 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是 _____.

15. 已知 $a > 1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

16. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式。

18. (12 分)

某工厂进行生产线智能化升级改造。升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？

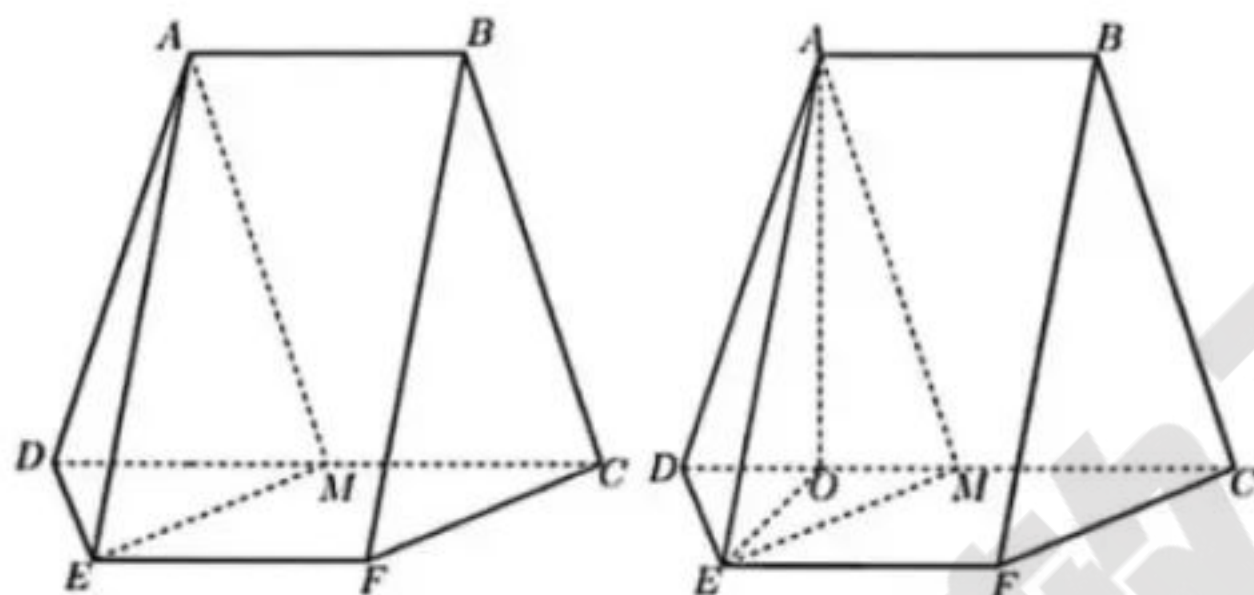
(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$ 。设 \bar{p} 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率。如果 $\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，则认为该工厂产品的优级品率提高了。根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？
($\sqrt{150} \approx 12.247$)

$$\text{附：} K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \frac{P(K^2 \geq k)}{k} \quad \begin{array}{ccc} 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

19. (12分)

如图, 已知 $AB \parallel CD, CD \parallel EF, AB = DE = EF = CF = 2$,
 $CD = 4, AD = BC = \sqrt{10}, AE = 2\sqrt{3}, M$ 为 CD 的中点.

- (1) 证明: $EM \parallel$ 平面 BCF ;
- (2) 求点 M 到 ADE 的距离.



20. (12分)

已知函数 $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $a \leq 2$ 时, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^{x-1}$ 恒成立.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M(1, 0)$ 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) $P(4, 0)$, 过 P 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, N 为 FP 的中点, 直线 NB 与 MF 交于 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 直线 $\begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB|=2$, 求 a 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.