内江市高中2024届第三次模拟考试

数学(理科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.)

1.A 2.C 3.B 4.C 5.C 6.C 7.B 8.B 9.B 10.D 11.D 12.D

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. $y=2x+1$ 14. -3 15. ±2 16. $\frac{2n}{n+1}$

三、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:(1)由表格知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+3+5}{5}=3$, ………… 1分

$\bar{y}=\frac{0.7+0.8+1+1.2+1.3}{5}=1$, ………… 2分

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0+1^2+2^2=10$,

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-0.3)+(-1)\times(-0.2)+0\times0+1\times0.2+2\times0.3=1.6$,

则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{1.6}{10}=0.16$, ………… 4分

$\hat{a}=1-0.16\times3=0.52$, ………… 5分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.16x+0.52$. ………… 6分

(2)依题意,补充 2×2 列联表如下:

	购买 A 等票	购买非 A 等票	总计
男性观众	40	50	90
女性观众	60	50	110
总计	100	100	200

………… 8分

$K^2=\frac{200\times(60\times50-40\times50)^2}{90\times110\times100\times100}\approx2.020<2.706$ ………… 10分

故没有90%的把握认为该节目的观众是否购买 A 等票与性别有关. ………… 12分

18. 解:(1)由 $\sqrt{2}\cos(B+\frac{\pi}{2})+\cos(A+C)+\sqrt{2}=0$,得 $\sqrt{2}\sin B+\cos B=\sqrt{2}$,

即 $\cos B=\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin B$, ………… 1分

代入 $\sin^2B+\cos^2B=1$,化简得 $3\sin^2B-4\sin B+1=0$,

解得 $\sin B=\frac{1}{3}$ 或 $\sin B=1$(舍去), ………… 3分

故 $\cos2B=1-2\sin^2B=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$, ………… 5分

(2)由 $A=C+\frac{\pi}{2}$,$A+B+C=\pi$,可得 $2C=\frac{\pi}{2}-B$,

所以 $\cos2C=\cos(\frac{\pi}{2}-B)=\sin B=\frac{1}{3}$, ………… 6分

即 $1-2\sin^2 C=\frac{1}{3}$，$\sin^2 C=\frac{1}{3}$，易知 C 为锐角，故 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos C=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

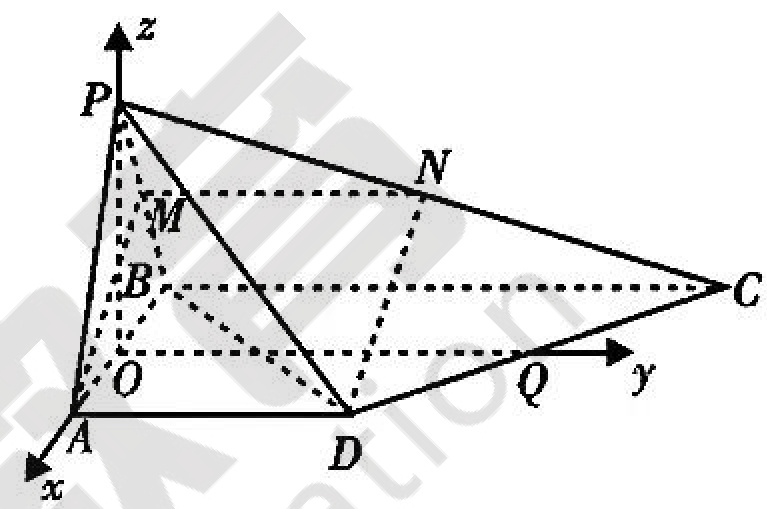
$\sin A=\sin(C+\frac{\pi}{2})=\cos C=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ………………………………………………………… 8 分

又 $b=\sqrt{3}$，由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=3\sqrt{3}$，

则 $a=3\sqrt{3}\sin A=3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{2}$，……………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 证明：取 PB 的中点 M，连接 AM.



$\because AB=AP$，$\therefore AM\perp PB$. ……………………………… 1 分

又平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，$AM\subset$ 平面 PAB，

$\therefore AM\perp$ 平面 PBC. ……………………………… 2 分

又 $BC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore AM\perp BC$. ……………………………… 3 分

$\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形，且 $\angle ABC=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$\therefore BC/\!/AD$，$\therefore AD\perp AM$.

又 $AD\perp AB$，$AM\cap AB=A$，$\therefore AD\perp$ 平面 PAB. ……………………………………… 4 分

又 $AD\subset$ 平面 PAD，$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PAB. ……………………………………… 5 分

(2) 取 PC 的中点 N，连接 MN、DN，则 $MN=\frac{1}{2}BC=AD$，$MN/\!/BC/\!/AD$.

$\therefore$ 四边形 $AMND$ 是平行四边形，则 $DN/\!/AM$.

$\therefore DN\perp$ 平面 PBC，则 $\angle DPC$ 是 PD 与平面 PBC 所成的角，即 $\angle DPC=30^\circ$，……………… 6 分

在 $Rt\triangle PAD$ 中，$PD=\sqrt{AD^2+AP^2}=\sqrt{6}$. 在 $Rt\triangle PDN$ 中，$PN=PD\cdot\cos 30^\circ=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore PC=2PN=3\sqrt{2}$ ……………………………………………………………… 7 分

在 $Rt\triangle PBC$ 中，$PB=\sqrt{PC^2-BC^2}=\sqrt{2}$，$\therefore\triangle PAB$ 是等边三角形. ……………………… 8 分

取 AB 的中点 O，CD 的中点 Q，连接 OP、OQ，易得 $OP\perp AB$，$OQ\perp AB$，

以点 O 为坐标原点，OA、OQ、OP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系如图所示，

则 $P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$C(-\frac{\sqrt{2}}{2},4,0)$，$D(\frac{\sqrt{2}}{2},2,0)$，

$\overrightarrow{CD}=(\sqrt{2},-2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},4-\frac{\sqrt{6}}{2})$，设平面 PDC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-2y_1=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+4y_1-\frac{\sqrt{6}}{2}z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，得 $x_1=\sqrt{2}$，$z_1=\sqrt{6}$，则 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},1,\sqrt{6})$. ……………………………………… 10 分

易知平面 ABD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}=\frac{\sqrt{6}}{3\times 1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

故平面 PDC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为准线为:$x=-1$,设 $y^2=2px$,则,$-\frac{p}{2}=-1$ ………………………………… 2 分

所以 $p=2$.

故抛物线 E 的标准方程为 $y^2=4x$. ………………………………… 3 分

(2)易知抛物线 E 的焦点 $F(1,0)$,

设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$,

由韦达定理可得 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,

接下来证明抛物线 E 在点 A 处的切线方程为 $y_1y=2x+2x_1$,

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\y_1y=2x+2x_1\end{cases}$ 可得 $y^2-2y_1y+4x_1=0$,即 $y^2-2y_1y+y_1^2=0$,即 $(y-y_1)^2=0$,

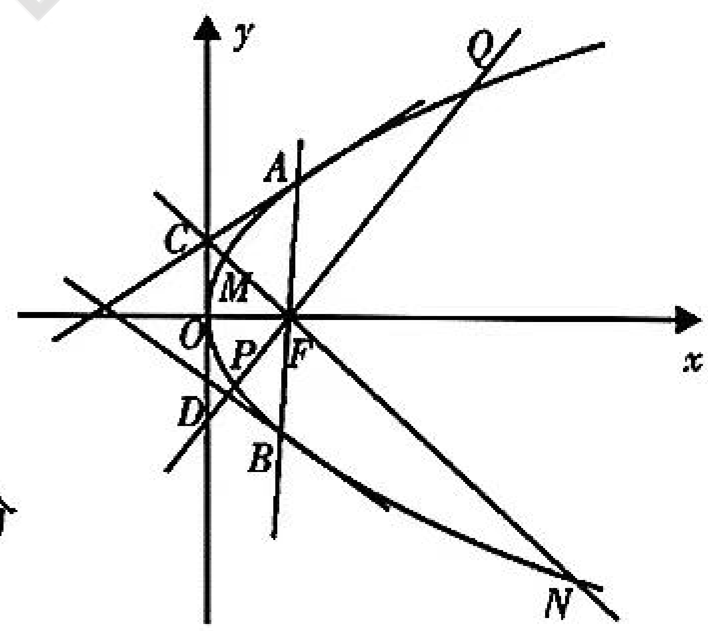
所以直线 $y_1y=2x+2x_1$ 与抛物线 E 只有唯一的公共点,

所以 AC 的方程为 $y_1y=2x+2x_1$,

同理可知,直线 BD 的方程为 $y_2y=2x+2x_2$, ………………………………… 5 分

在直线 AC 的方程中,令 $x=0$,可得 $y=\frac{2x_1}{y_1}=\frac{2\times\frac{y_1^2}{4}}{y_1}=\frac{y_1}{2}$,即点 $C(0,\frac{y_1}{2})$,

同理可得点 $D(0,\frac{y_2}{2})$, ………………………………… 6 分



所以直线 CF 的方程为 $x+\frac{y}{\frac{y_1}{2}}=1$,即 $x=1-\frac{2y}{y_1}$,

设点 $M(x_3,y_3)$、$N(x_4,y_4)$,联立 $\begin{cases}x=1-\frac{2y}{y_1}\\y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2+\frac{8y}{y_1}-4=0$,

由韦达定理可得 $y_3+y_4=-\frac{8}{y_1}$,$y_3y_4=-4$, ………………… 8 分

所以 $|MN|=x_3+x_4+2=2-\frac{2}{y_1}(y_3+y_4)+2=4-\frac{2}{y_1}\times(-\frac{8}{y_1})$

$=\frac{4y_1^2+16}{y_1^2}$,

同理可得 $|PQ|=\frac{4y_2^2+16}{y_2^2}$, ………………………………… 10 分

假设存在实数 λ,使得 $|MN|\cdot|PQ|=\lambda(|MN|+|PQ|)$ 恒成立,则

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}=\frac{y_1^2}{4y_1^2+16}+\frac{y_2^2}{4y_2^2+16}=\frac{y_1^2(4y_2^2+16)+y_2^2(4y_1^2+16)}{16(y_1^2+4)(y_2^2+4)}$$

$$=\frac{(y_1y_2)^2+2(y_1^2+y_2^2)}{2[(y_1y_2)^2+4(y_1^2+y_2^2)+16]}=\frac{16+2(16m^2+8)}{2[16+4(16m^2+8)+16]}=\frac{1}{4}$$

故存在实数 $\lambda=4$,使得 $|MN|\cdot|PQ|=\lambda(|MN|+|PQ|)$ 恒成立 ………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$,

$\because f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$,

$\therefore$ 当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

$\therefore f(x)_{min}=f(a)=\ln a-a+1$，………………………………………………………… 2 分

$\because f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\ln a-a+1\geqslant 0, a\in(0,+\infty)$.

令 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，………………………………………… 3 分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减.

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=0$ ………………………………………………………………………… 4 分

又$\because a\in(0,1)$，$g(a)=\ln a-a+1<g(1)=0$，$a\in(1,+\infty)$，$g(a)=\ln a-a+1<g(1)=0$，

$\therefore a=1$，故 a 的取值集合为 $\{1\}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) 由(1)可知，当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即 $\ln x+\dfrac{1}{x}-1\geqslant 0$，$\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，…………… 6 分

$\therefore \ln(x+1)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$（当 $x=0$ 时，“$=$”成立），令 $x=\dfrac{1}{n}(n\in N^*)$，

$\ln(\dfrac{1}{n}+1)>\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\dfrac{1}{n+1}$，则 $\ln(\dfrac{1+n}{n})>\dfrac{1}{n+1}$，

$\ln(n+1)-\ln n>\dfrac{1}{n+1}$，………………………………………………………………………… 7 分

故 $\ln(n+2)-\ln(n+1)>\dfrac{1}{n+2}$，$\ln(n+3)-\ln(n+2)>\dfrac{1}{n+3}$，…，

$\ln(2024n)-\ln(2024n-1)>\dfrac{1}{2024n}$，

由累加法可得 $\ln(2024n)-\ln n>\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2024n}$，

即 $\ln 2024>\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2024n}$ ……………………………………………………… 9 分

令 $h(x)=\sin x-x, x\in(0,+\infty)$，，

$\because h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore h(x)<h(0)=0$，

$\therefore \sin x<x$，

$\because \sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2024n}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2024n}$ ……………………… 11 分

$\therefore \sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{2024n}<\ln 2024$ ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 将曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos\alpha+1,\\ y=\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）中的参数消去，

得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=1$，…………………………………………………… 2 分

所以曲线 C_1 表示以 $(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，1 为半径的圆 ………………………………………………… 3 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，

得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y=\frac{1}{2}$， …………………………………………………… 4 分

所以曲线 C_2 表示经过点$(\frac{1}{2},0)$，且斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的直线. …………………………………… 5 分

(2)由(1)得圆心到直线 C_2 的距离为$\dfrac{|1-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}|}{2}=\frac{1}{2}$，

所以$|AB|=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$ …………………………………………………………………… 6 分

设点 $P(\cos\alpha+1,\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2})$，

则点 P 到直线 C_2 的距离 $d=\dfrac{|\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha-1|}{2}=\dfrac{|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|}{2}$.

因为$\triangle PAB$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 8 分

所以$|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|=2$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$或 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$(舍去)，

所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，或 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\alpha=\pi+2k\pi,k\in Z$，

…… 9 分

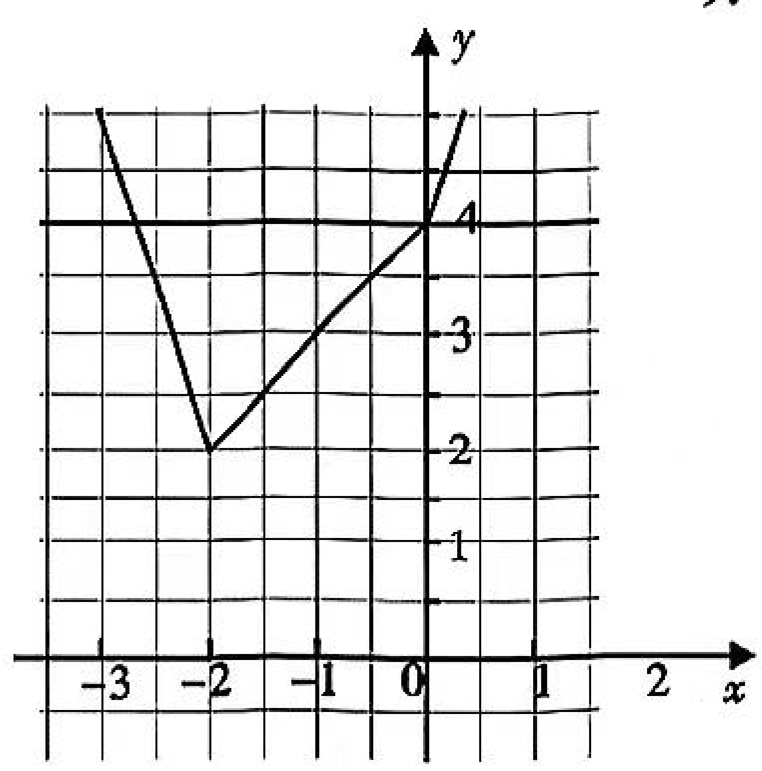
点 P 的直角坐标为$(\frac{3}{2},\sqrt{3})$或$(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ ………………………………………………… 10 分

23. (1)由 $2|x+2|+|x|\leqslant3|x+2|$可得$|x|\leqslant|x+2|$， ………………………………………… 2 分

即 $x^2\leqslant(x+2)^2$，解得 $x\geqslant-1$ ……………………………………………………………… 4 分

所以不等式的解集为$[-1,+\infty)$ ……………………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=\begin{cases}-3x-4,x\leqslant-2\\x+4,-2<x<0\\3x+4,x\geqslant0\end{cases}$，其函数图象如下图，由图可



知：$t=\frac{1}{2}\times(0+\frac{8}{3})\times2=\frac{8}{3}$， ………………………………… 7 分

又因为 a、b、c 均为正数，则 $a+2b+c=\frac{8}{3}\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}$

(当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$时，等号成立) ………………………… 8 分

即$\frac{4}{3}\geqslant\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$，即$\frac{4}{3\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{c}$ ……………………… 10 分