内江市高中2024届第三次模拟考试

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.)

1.D　2.C　3.C　4.B　5.C　6.C　7.D　8.A　9.B　10.D　11.D　12.A

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. $y=2x+1$　14. 1　15. -3　16. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

三、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:(1)由表格知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+3+5}{5}=3$, ………… 1分

$\bar{y}=\frac{0.7+0.8+1+1.2+1.3}{5}=1$, ………… 2分

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0+1^2+2^2=10$,

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-0.3)+(-1)\times(-0.2)+0\times0+1\times0.2+2\times0.3=1.6$,

则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{1.6}{10}=0.16$, ………… 4分

$\hat{a}=1-0.16\times3=0.52$, ………… 5分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.16x+0.52$. ………… 6分

(2)依题意,补充 2×2 列联表如下:

	购买 A 等票	购买非 A 等票	总计
男性观众	40	50	90
女性观众	60	50	110
总计	100	100	200

………… 8分

$K^2=\frac{200\times(60\times50-40\times50)^2}{90\times110\times100\times100}\approx2.020<2.706$ ………… 10分

故没有90%的把握认为该节目的观众是否购买 A 等票与性别有关. ………… 12分

18. 解:(1)依题意,设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,因为 a_2+2,a_3,a_5-2 成等比数列,

所以 $a_3^2=(a_2+2)(a_5-2)$,又 $d=4$,即 $(a_1+8)^2=(a_1+6)(a_1+14)$,解得 $a_1=-5$, … 1分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=-5+4(n-1)=4n-9$, ………… 3分

由已知 $S_n=2S_{n-1}+2(n\geqslant2)$,

故 $S_{n+1}=2S_n+2$,

两式相减,得 $b_{n+1}=2b_n(n\geqslant2)$, ………… 4分

又 $S_2=2S_1+2$,解得 $b_2=4$,所以 $b_2=2b_1$, ………… 5分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以2为首项,2为公比的等比数列,故 $b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$ ………… 6分

(2)由(1)得 $c_n=a_nb_n=(4n-9)\cdot 2^n$,故 $T_n=-5\times 2^1-1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(4n-9)\cdot 2^n$,

则 $2T_n=-5\times 2^2-1\times 2^3-3\times 2^4+\cdots+(4n-9)\times 2^{n+1}$ ………………………………………… 8 分

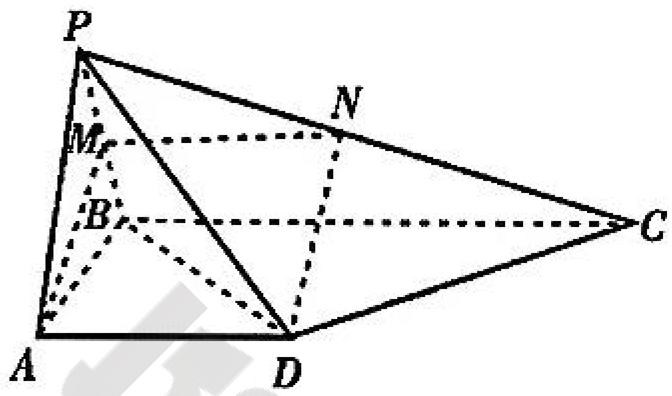
两式相减得 $-T_n=-10+4(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(4n-9)\times 2^{2n+1}$ ………………………………… 9 分

$=-10+4\times\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(4n-9)\times 2^{2n+1}$ ………………………………… 10 分

$=(13-4n)\times 2^{n+1}-26$, …………………………………………………………… 11 分

故 $T_n=(4n-13)\times 2^{n+1}+26$ ……………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)证明:取 PB 的中点 M,连接 AM.



$\because AB=AP$,$\therefore AM\perp PB$. …………………………………………… 1 分

又平面 $PAB\perp$ 平面 PBC,平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$,$AB\subset$ 平面 PAB,

$\therefore AM\perp$ 平面 PBC. …………………………………………………… 2 分

又 $BC\subset$ 平面 PBC,

$\therefore AM\perp BC$. …………………………………………………………………………… 3 分

$\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形,且 $\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore BC/\!/AD$,$\therefore AD\perp AM$.

又 $AD\perp AB$,$AM\cap AB=A$,

$\therefore AD\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………………………………… 4 分

又 $AD\subset$ 平面 PAD,

$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PAB. ………………………………………………………………… 5 分

(2)取 PC 的中点 N,连接 MN、DN,则 $MN=\dfrac{1}{2}BC=AD$,$MN/\!/BC/\!/AD$.

$\therefore$ 四边形 $AMND$ 是平行四边形,则 $DN/\!/AM$.

又 $AM\perp$ 平面 PBC,$\therefore DN\perp$ 平面 PBC,则 $\angle DPC$ 是 PD 与平面 PBC 所成的角,

即 $\angle DPC=30^\circ$, ……………………………………………………………………………… 7 分

在 $Rt\triangle PAD$ 中,易知 $PD=\sqrt{AD^2+AP^2}=\sqrt{6}$. ……………………………………………… 8 分

在直角梯形 $ABCD$ 中,易知 $CD=\sqrt{6}$,$\therefore CD=PD$,$\therefore\ \angle DCP=\angle DPC=30^\circ$,

$\therefore PC=2\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}$, ………………………………………………………… 9 分

在 $Rt\triangle PBC$ 中,$PB=\sqrt{PC^2-BC^2}=\sqrt{2}$,

$\therefore\ \triangle PAB$ 是等边三角形. 从而 $AM=DN=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …………………………………………… 10 分

$\therefore V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PBC}\times DN=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故所求三棱锥 $P-BCD$ 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$,

$\because f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$,

$\therefore$ 当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

$\therefore f(x)_{min}=f(a)=\ln a-a+1$，………………………………………… 2 分

由已知 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\ln a-a+1\geqslant 0$，$a\in(0,+\infty)$.

令 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$， ………………………………… 3 分

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=0$ ………………………………………………………… 4 分

又 $\because$ $a\in(0,1)$，$g(a)=\ln a-a+1<g(1)=0$，

$a\in(1,+\infty)$，$g(a)=\ln a-a+1<g(1)=0$，

$\therefore$ $a=1$，故 a 的取值集合为 $\{1\}$. …………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 可知，当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即 $\ln x+\dfrac{1}{x}-1\geqslant 0$，$\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$， ………… 7 分

$\therefore \ln(x+1)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$（当 $x=0$ 时，“$=$”成立），令 $x=\dfrac{1}{n}(n\in N^*)$，

$\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\dfrac{1}{n+1}$，则 $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)>\dfrac{1}{n+1}$，即 $\ln(n+1)-\ln n>\dfrac{1}{n+1}$， ………… 8 分

故 $\ln(n+2)-\ln(n+1)>\dfrac{1}{n+2}$，$\ln(n+3)-\ln(n+2)>\dfrac{1}{n+3}$，…，$\ln(3n)-\ln(3n-1)>\dfrac{1}{3n}$，

由累加法可得 $\ln(3n)-\ln n>\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{3n}$，…………………………… 10 分

即 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots\dfrac{1}{3n}<\ln 3$ …………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 因为准线为：$x=-1$，设 $y^2=2px$，则 $-\dfrac{p}{2}=-1$ ………………………… 2 分

所以 $p=2$

故抛物线 E 的标准方程为 $y^2=4x$ ……………………………………………………… 3 分

(2) 证明：易知抛物线 E 的焦点 $F(1,0)$，

设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$，

由韦达定理可得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，……………………………………………… 4 分

接下来证明抛物线 E 在点 A 处的切线方程为 $y_1y=2x+2x_1$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\y_1y=2x+2x_1\end{cases}$ 可得 $y^2-2y_1y+4x_1=0$，即 $y^2-2y_1y+y_1^2=0$，即 $(y-y_1)^2=0$，

所以，直线 $y_1y=2x+2x_1$ 与抛物线 E 只有唯一的公共点，

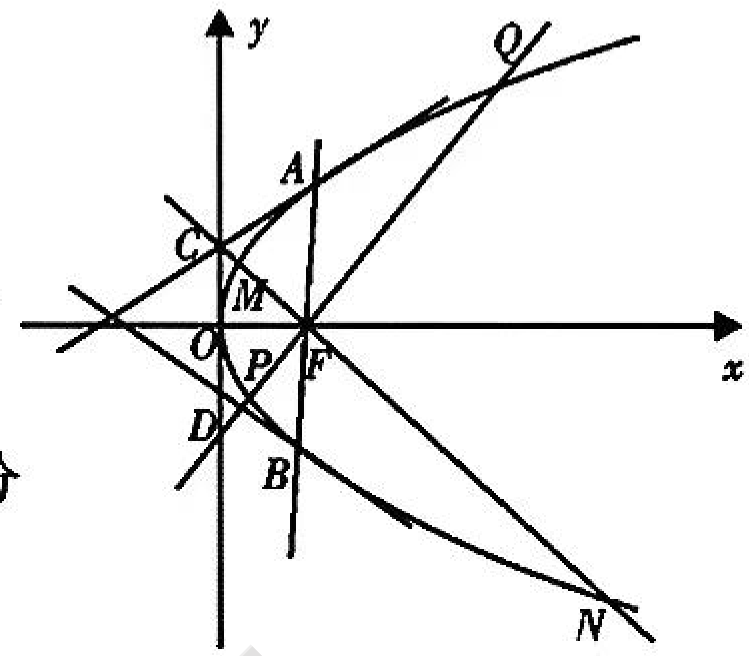
所以，AC 的方程为 $y_1y=2x+2x_1$，……………………………………………………… 6 分

同理可知，直线 BD 的方程为 $y_2y=2x+2x_2$，

在直线 AC 的方程中，令 $x=0$，可得 $y=\dfrac{2x_1}{y_1}=\dfrac{2\times\frac{y_1^2}{4}}{y_1}=\dfrac{y_1}{2}$，即点 $C\left(0,\dfrac{y_1}{2}\right)$， ………… 8 分

同理可得点 $D(0,\frac{y_2}{2})$，所以，直线 CF 的方程为 $x+\frac{y}{\frac{y_1}{2}}=1$，

即 $x=1-\frac{2y}{y_1}$，



设点 $M(x_3,y_3)$、$N(x_4,y_4)$，联立 $\begin{cases}x=1-\frac{2y}{y_1}\\ y^2=4x\end{cases}$，可得 $y^2+\frac{8y}{y_1}-4=0$，

由韦达定理可得 $y_3+y_4=-\frac{8}{y_1}$，$y_3y_4=-4$，　……………… 9 分

所以，$|MN|=x_3+x_4+2=2-\frac{2}{y_1}(y_3+y_4)+2=4-\frac{2}{y_1}\times(-\frac{8}{y_1})$

$=\frac{4y_1^2+16}{y_1^2}$，　…………………………………………………… 10 分

同理可得 $|PQ|=\frac{4y_2^2+16}{y_2^2}$，

所以，$\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}=\frac{y_1^2}{4y_1^2+16}+\frac{y_2^2}{4y_2^2+16}=\frac{y_1^2(4y_2^2+16)+y_2^2(4y_1^2+16)}{16(y_1^2+4)(y_2^2+4)}$

$=\frac{8(y_1y_2)^2+16(6y_1^2+y_2^2)}{16[(y_1y_2)^2+4(y_1^2+y_2^2)+16]}=\frac{(y_1y_2)^2+2(y_1^2+y_2^2)}{2[(y_1y_2)^2+4(y_1^2+y_2^2)+16]}$

$=\frac{16+2(16m^2+8)}{2[16+4(16m^2+8)+16]}=\frac{1}{4}$

故 $\frac{1}{|MN|}+\frac{1}{|PQ|}$ 为定值 $\frac{1}{4}$　…………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 将曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos\alpha+1,\\ y=\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）中的参数消去，

得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$，　…………………………………… 2 分

所以曲线 C_1 表示以 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，1 为半径的圆　…………………………………… 3 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=\frac{1}{2}$，

得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y=\frac{1}{2}$，　…………………………………… 4 分

所以曲线 C_2 表示经过点 $(\frac{1}{2},0)$，且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线. …………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 得圆心到直线 C_2 的距离为 $\frac{|1-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}|}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$　…………………………………………………… 6 分

设点 $P(\cos\alpha+1,\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2})$，

则点 P 到直线 C_2 的距离 $d=\frac{|\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha-1|}{2}=\frac{|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|}{2}$.

因为 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………… 8 分

所以 $|2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})-1|=2$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ 或 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$(舍去)，

所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，或 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\alpha=\pi+2k\pi,k\in Z$，

……………………………………………………………………………………………… 9 分

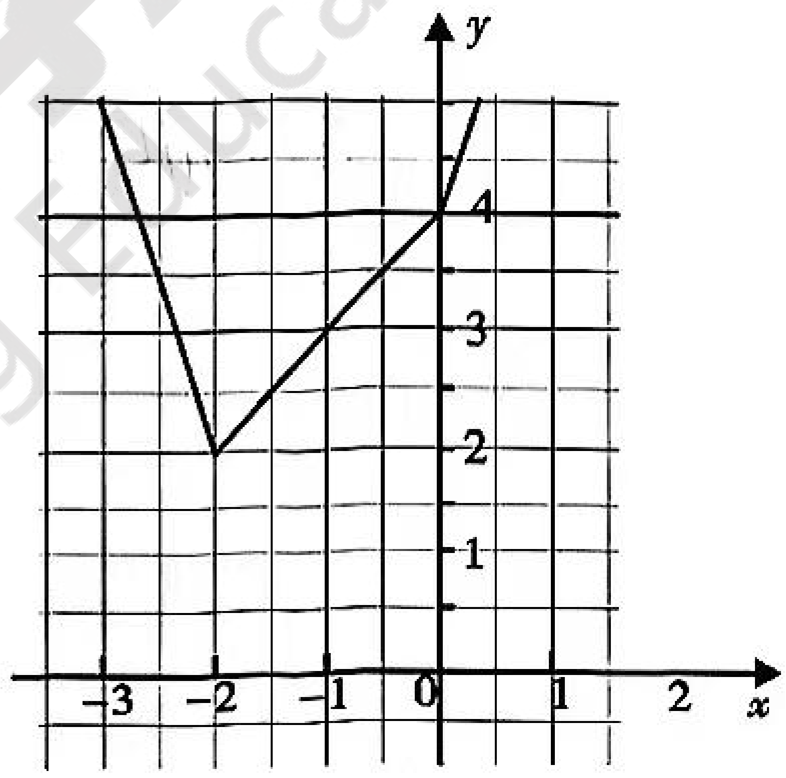
点 P 的直角坐标为 $(\frac{3}{2},\sqrt{3})$ 或 $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ …………………………………………………… 10 分

23.(1)由 $2|x+2|+|x|\leqslant 3|x+2|$ 可得 $|x|\leqslant|x+2|$，…………………………………… 2 分

即 $x^2\leqslant(x+2)^2$，解得 $x\geqslant-1$ …………………………………………………………… 4 分

所以不等式的解集为 $[-1,+\infty)$ ……………………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=\begin{cases}-3x-4,x\leqslant-2\\x+4,-2<x<0\\3x+4,x\geqslant0\end{cases}$，其函数图象如下图，由图可



知：$t=\frac{1}{2}\times(0+\frac{8}{3})\times2=\frac{8}{3}$，………………………………… 7 分

又因为 a、b、c 均为正数，则 $a+2b+c=\frac{8}{3}\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}$

(当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时，等号成立) ……………………… 8 分

即 $\frac{4}{3}\geqslant\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$，即 $\frac{4}{3\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{c}$ …………………… 10 分