德阳市高中2021级"三诊"试题

数学参考答案与评分标准

（理工农医类）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	B	A	D	C	D	A	A	D	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $\frac{\pi}{2}$　　14. $4\sqrt{3}$　　15. $\pm\sqrt{2}$　　16. 5.

三、解答题

17. 解：(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d

$\because 2a_1=2, a_5=5(a_4-a_3)$

$\therefore a_1+4d=5(a_1+3d-a_1-2d)$　　$\therefore a_1=d=1.$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 1=n$ ………………………………… 3分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q

若选条件①，$b_5=4(b_4-b_3)$

由$b_1=2$，且$b_5=4(b_4-b_3)$

得$b_1q^4=4(b_1q^3-b_1q^2)$

$\therefore q^2-4q+4=0$，解得$q=2$.

所以$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列.

故$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\in \mathbf{N}^*)$ ………………………………… 6分

若选条件②，$b_{n+1}=S_n+2$

令$n=1$，得$b_2=S_1+2=b_1+2=4$

$\therefore$ 公比$q=\frac{b_2}{b_1}=2$

∴ 数列$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列.

从而 $b_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$ …………………………………… 6分

(2) 假设满足题意的 m,n 存在.

因为 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$

所以$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$

两式相减，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

即$\frac{1}{2}T_n=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$ …………………………………………………… 9分

因为$\frac{n+2}{2^n}>0$，所以 $T_n<2$

所以由 $2-\frac{n+2}{2^n}=m$，得 $m<2$ 且 $m\in\mathbf{N}^*$

所以 $m=1$，即 $2-\frac{n+2}{2^n}=1$，解得 $n=2$.

所以满足题意的 m,n 存在，且 $m=1,n=2$. …………………………… 12分

18. 解：(1) 由于模型①残差波动小，应该选择模型①. …………………………… 2分

(2)(ⅰ)剔除异常数据，即3月份的数据 ……………………………………… 3分

剩下数据的平均数为 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(7\times 6-7)=7$

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(30\times 6-30)=30$

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1470-210=1260$

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}=210$

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=370-49=321$

$\sum_{i=1} x_i^2 - 5 \cdot \overline{x}^2 = 76$

$\therefore \hat{b} = \dfrac{105}{38}, \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 30 - \dfrac{105}{38} \times 7 = \dfrac{405}{38}$

$\therefore$ 所选模型的回归方程为 $\hat{y} = \dfrac{105}{38}x + \dfrac{405}{38}$. …………………………… 10 分

(ⅱ) 若广告投入量 $x = 19$

则该模型收益的预报值是 $\dfrac{105}{38} \times 19 + \dfrac{405}{38} = \dfrac{1200}{19} \approx 63.16$（万元）. …

…………………………………………………………………………… 12 分

19.(1) 证明：连接 A_1B, A_1C.

因为 $\angle A_1AB = \angle A_1AC, AB = AC, AA_1 = AA_1$

所以 $\triangle A_1AB \cong \triangle A_1AC$，所以 $A_1B = A_1C$.

因为 D 为 BC 的中点，所以 $BC \perp A_1D$. …………………………… 2 分

因为 $AB = AC, D$ 为 BC 的中点，所以 $BC \perp AD$.

因为 $A_1D \cap AD = D, A_1D, AD \subset$ 平面 A_1AD

所以 $BC \perp$ 平面 A_1AD. …………………………………………… 4 分

又 $B_1C_1 \parallel BC$，所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 A_1AD.

又 $B_1C_1 \subset$ 平面 EB_1C_1F

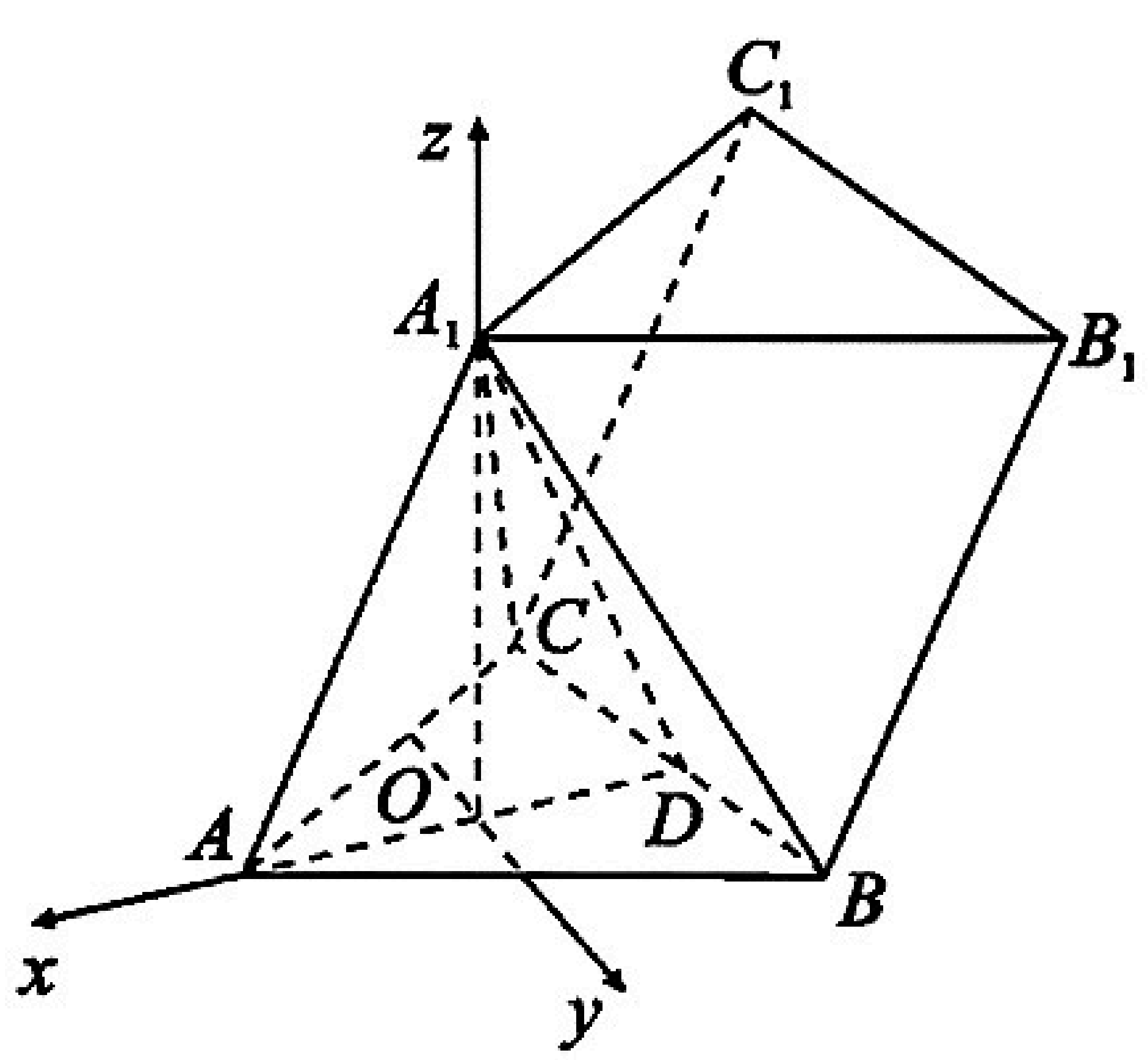
所以平面 $A_1AD \perp$ 平面 EB_1C_1F. …………………………………… 6 分

(2) 解：取 AD 的中点 O，连接 A_1O，因为 $\triangle A_1AD$ 是等边三角形，所以 $A_1O \perp AD$.

由(1) 可知 $BC \perp$ 平面 A_1AD，则 BC，AD, A_1O 两两垂直

故以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，过 O 作 BC 的平行线为 y 轴，OA_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$. ……

…………………………………… 8 分



因为底面 ABC 是边长为 4 的等边三角形，所以 $AD = 2\sqrt{3}$

因为 $\triangle A_1AD$ 是等边三角形，所以 $A_1O=3$.

所以 $A(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(0,0,3)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$C(-\sqrt{3},-2,0)$

则 $\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},-2,0)$.

设平面 AA_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+3z=0\\ -2\sqrt{3}x-2y=0\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-3,1)$.

易知平面 A_1AD 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC}=(0,-4,0)$ ······················ 10 分

记二面角 $D-AA_1-C$ 的大小为 θ

则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{12}{\sqrt{13}\times 4}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

故二面角 $D-AA_1-C$ 的正弦值为 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. ······ 12 分

20. 解：(1) 设椭圆半焦距 c

由题意得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a+c)b=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$

解得：$a=2$，$b=1$

∴ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ································ 4 分

(2) 由题意可设直线的方程为 $y=kx+m(k\neq 0,m\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$

消去 y 并整理，得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$ ···························· 6 分

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

又直线 OM、MN、ON 的斜率依次成等比数列

故 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2\Rightarrow-\dfrac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$

由 $m\neq0$，得 $k^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow k=\pm\dfrac{1}{2}$ ………………………………………… 8 分

又由 $\triangle=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$，得：$0<m^2<2$

显然 $m^2\neq1$（否则 $x_1x_2=0$，则 x_1、x_2 中至少有一个为 0，直线 OM、ON 中至少有一条的斜率不存在，与已知矛盾）．……………………………………… 9 分

设原点 O 到直线 MN 的距离为 d，则

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{|m|}{2\sqrt{1+k^2}}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$$

$$=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{-(m^2-1)^2+1}$$

由 $0<m^2<2$，且 $m^2\neq1$，得 $S_{\triangle OMN}$ 的取值范围为 $(0,1)$． …………… 12 分

21．解：(1) 因为 $F(x)=\dfrac{1}{6}x^3-x+\sin x+2$，所以 $F'(x)=\dfrac{x^2}{2}-1+\cos x$

设 $m(x)=\dfrac{x^2}{2}-1+\cos x$，则 $m'(x)=x-\sin x$

设 $\varphi(x)=x-\sin x$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x$

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant0$，即 $m'(x)=x-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m'(x)>m'(0)=0$

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m(x)>m(0)=0$

所以 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上没有极值点．……………………………… 4 分

(2) 由(1)知，当 $x\geqslant0$，$\sin x\leqslant x$，$\cos x\geqslant-\dfrac{x^2}{2}+1$

所以 $\dfrac{x^2}{2}+x+1\geqslant\sin x-\cos x+2$．……………………………………… 6 分

设 $G(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1\,(x\geqslant0)$，则 $G'(x)=e^x-x-1$

设 $n(x)=e^x-x-1(x\geqslant 0)$,则 $n'(x)=e^x-1\geqslant 0$

所以 $n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $n(x)\geqslant n(0)=0$,即 $G'(x)\geqslant 0$

所以 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $G(x)\geqslant G(0)=0$,即 $e^x\geqslant \frac{x^2}{2}+x+1$ ………………………………… 8 分

所以 $e^x\geqslant \sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立.

当 $x\geqslant 0, a\geqslant 1$ 时,$e^{ax}\geqslant e^x$

所以当 $a\geqslant 1$ 时,$e^{ax}\geqslant \sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立……… 9 分

当 $a<1$ 时,设 $h(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2$

则 $h'(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x$

$h'(0)=a-1<0$,所以存在实数 $x_0>0$,使得对于任意的 $x\in(0,x_0)$,均有 $h'(x)<0$

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$h(x)<0$,即 $e^{ax}<\sin x-\cos x+2$

所以 $a<1$ 不符合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………… 12 分

22. 解:(1) 由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2}+2 \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数)

消去参数 t 得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1(y\neq -1)$ ……… 4 分

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入直线 $l: x-y-1=0$

得直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$. ………………………………… 5 分

(2) 由点 P 的极坐标为 $\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$,得点 P 的直角坐标为 $(0,-1)$.

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)

代入曲线 C 的普通方程得：$t^2-3\sqrt{2}t+4=0$ ……………………………… 8 分

设 A、B 对应参数为 t_1、t_2，则 D 对应的参数为 $\frac{t_1+t_2}{2}$，$t_1+t_2=3\sqrt{2}$. … 9 分

故 $|PD|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………… 10 分

23. 解：(1) 由 $(a+d)^2>(b+c)^2$ 及 $4ad=4bc$

得：$(a-d)^2>(b-c)^2$

所以 $|a-d|>|b-c|$. ………………………………………………… 4 分

(2) 因为 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2$

$=(ac+bd)^2$ ……………………………………… 6 分

所以 $t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=t(ac+bd)$

由于 $\sqrt{a^4+c^4}\geqslant\sqrt{2}ac$，$\sqrt{b^4+d^4}\geqslant\sqrt{2}bd$ ……………………………… 8 分

又已知 $t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4}$

则 $t(ac+bd)\geqslant\sqrt{2}(ac+bd)$，当 $a=c$，$b=d$ 时取等号.

故 $t\geqslant\sqrt{2}$. ……………………………………………………… 10 分