德阳市高中2021级“三诊”考试

数学试卷（理工农医类）

说明：

1. 本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷，共4页. 考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试卷、草稿纸上答题无效. 考试结束后，将答题卡交回.
2. 本试卷满分150分，120分钟完卷.

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x \mid 1<x<2024\}$，$B=\{x \mid x<a\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是

A. $(2024,+\infty)$　　B. $[2024,+\infty)$　　C. $(-\infty,2024]$　　D. $(-\infty,2024)$

2. 欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 把自然对数的底数 e，虚数单位 i，$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 联系在一起，充分体现了数学的和谐美，被誉为“数学中的天桥”，若复数 z 满足 $(e^{i\pi}+i)\cdot z=1+i$，则正确的是

A. z 的共轭复数为 $-i$　　B. z 的实部为1

C. z 的虚部为 i　　D. z 的模为1

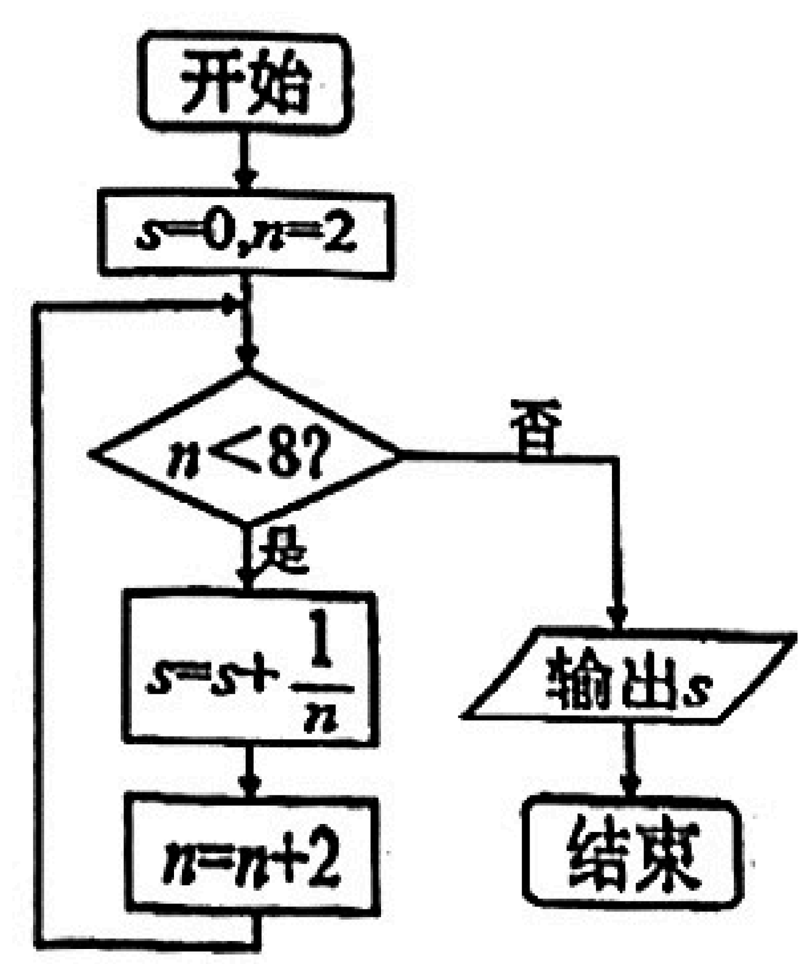
3. 在 $(2+x)(1+x)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是

A. 30　　B. 35　　C. 55　　D. 60

4. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，且 $f'(x_0)=\frac{1}{2}f(x_0)$，则 $\tan 2x_0$ 的值是

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

5. 执行右面的程序框图，输出的 $S=$



A. $\frac{11}{12}$　　B. $\frac{25}{24}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

6. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1)$，$O$ 为坐标原点，动点 $P(x,y)$ 满足约束条件 $\begin{cases}0\leqslant\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\leqslant 1\\0\leqslant\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}\leqslant 2\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最大值为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

7. 2023年7月28日至8月8日，第31届世界夏季大学生运动会在成都市举行，组委会将5名大学生分配到 A，B，C 三个路口进行引导工作，每个路口至少分配一人，每人只能去一个路口. 若甲、乙要求去同一个路口，则不同的分配方案共有

A. 18种　　B. 24种　　C. 36种　　D. 48种

8. 设 α、β、γ 为不同的平面，m、n、l 为不同的直线，则 $m\perp\beta$ 的一个充分条件为

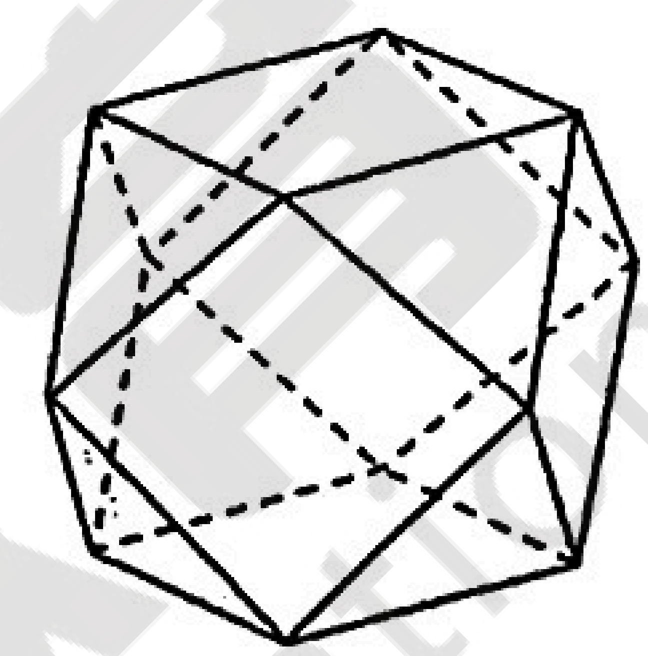
A. $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$　　　　B. $\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

C. $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$　　　　D. $n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

9. 如今我国物流行业蓬勃发展，极大地促进了社会经济发展和资源整合. 已知某类果蔬的保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=e^{ax+b}$（a,b 为常数），若该果蔬在 7℃ 的保鲜时间为 288 小时，在 21℃ 的保鲜时间为 32 小时，且该果蔬所需物流时间为 4 天，则物流过程中果蔬的储藏温度（假设物流过程中恒温）最高不能超过

A. 14℃　　B. 15℃　　C. 13℃　　D. 16℃

10. “阿基米德多面体”也称半正多面体，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，它体现了数学的对称美. 如图是以正方体的各条棱的中点为顶点的多面体，这是一个有八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，若该多面体的棱长为 $\sqrt{2}$，则该多面体外接球的表面积为



A. 8π　　B. 4π

C. 2π　　D. $\frac{4}{3}\pi$

11. 设 F_1、F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，O 是坐标原点，点 P 是 C 上异于实轴端点的任意一点，若 $|PF_1|\cdot|PF_2|-|OP|^2=2a^2$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 2

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $(x-2)[f'(x)-f(x)]>0$，$f(4-x)=f(x)e^{4-2x}$，则不等式 $e^3f(\ln x)<xf(3)$ 的解集是

A. $(0,e^3)$　　B. $(1,e^3)$　　C. (e,e^3)　　D. $(e^3,+\infty)$

第 Ⅱ 卷（非选择题　共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分，第 13 ～ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填在答题卡上.

13. 已知函数 $f(x)=\cos(x+\theta)$ 是奇函数，则 θ 的最小正值为 ________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $C=\frac{\pi}{3}$，若向量 $\boldsymbol{m}=(c-4,a-b)$，$\boldsymbol{n}=(a-b,c+4)$ 满足 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ________.

15. 已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，若直线 $x-y+m=0$ 上存在唯一点 P 满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，则实数 m 的值为 ________.

16. 已知 F 为抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于不同的两点 A、B，若抛物线 C 在 A、B 两点处的切线相交于点 P，则 $|PF|^2+\frac{4}{|AB|}$ 的最小值为 ________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 12 分）

已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，$2a_1=b_1=2$，$a_5=5(a_4-a_3)$，在①$b_5=4(b_4-b_3)$，②$b_{n+1}=S_n+2$ 这两个条件中任选其中一个，完成下面问题的解答.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$的前 n 项和为 T_n，是否存在 $m,n\in\mathbf{N}^*$，使得 $T_n=a_m$？若存在，求出所有满足题意的 m,n；若不存在，请说明理由.

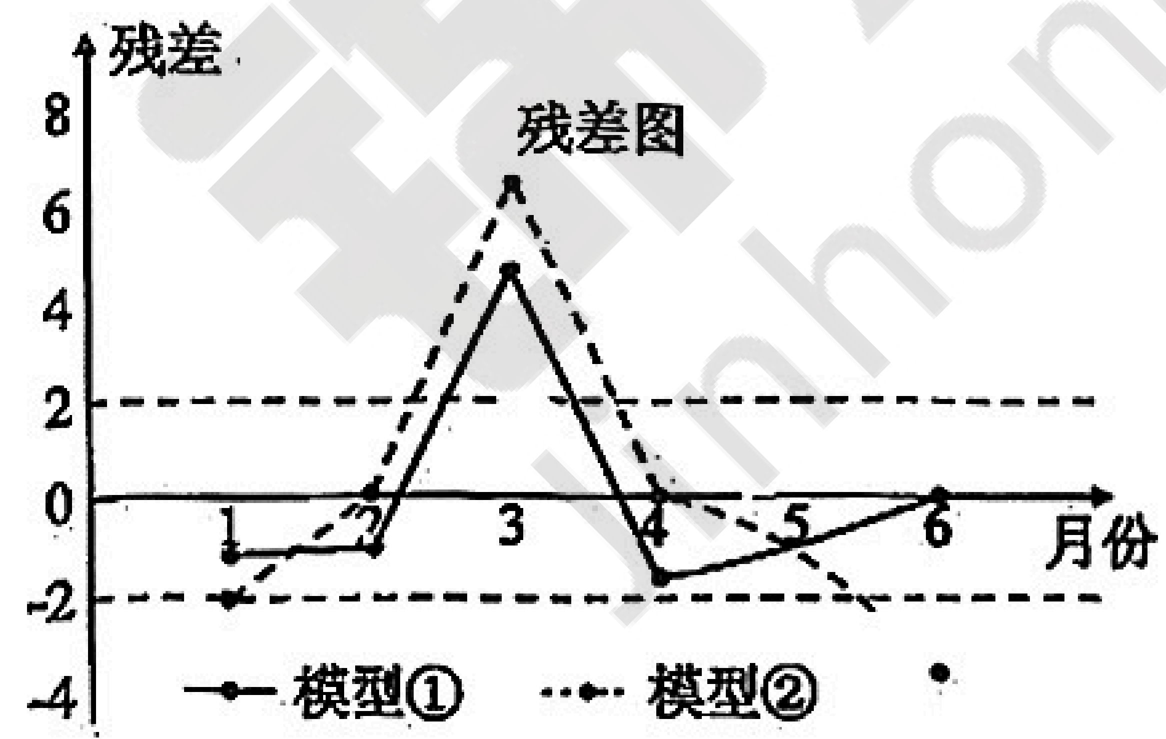
18.（本题满分 12 分）

某公司为了确定下季度的前期广告投入计划，收集并整理了近 6 个月广告投入量 x（单位：万元）和收益 y（单位：万元）的数据如表（其中有些数据污损不清）：

月份	1	2	3	4	5	6
广告投入量	2		7	8	10	
收益		20	30	34	37	

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2$
7	30	1470	370

他们分别用两种模型①$y=bx+a$，②$y=ae^{bx}$进行拟合，得到相应的回归方程并进行残差分析，得到如图所示的残差图及一些统计量的值.



（1）根据残差图，比较模型①，②的拟合效果，应选择哪个模型？

（2）残差绝对值大于 2 的数据被认为是异常数据，需要剔除.

（ⅰ）剔除异常数据后，求出（1）中所选模型的回归方程；

（ⅱ）若广告投入量 $x=19$，则（1）中所选模型收益的预报值是多少万元？（精确到 0.01）

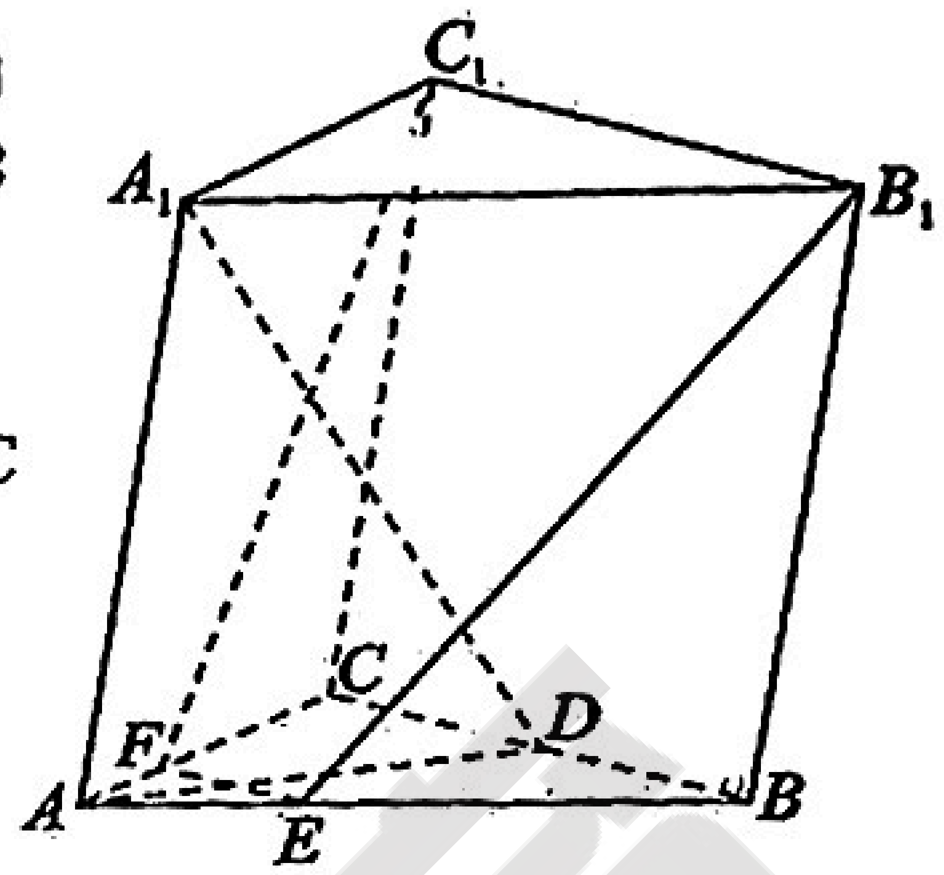
附：对于一组数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

19.（本题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是等边三角形，$\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$D$ 为 BC 的中点，过 B_1C_1 的平面交棱 AB 于 E，交 AC 于 F.

(1) 求证：平面 $A_1AD\perp$ 平面 EB_1C_1F；

(2) 若 $\triangle A_1AD$ 是等边三角形，$AB=4$，求二面角 $D-AA_1-C$ 的正弦值.



20.（本题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，其左右焦点分别为 F_1、F_2，下顶点为 A，右顶点为 B，$\triangle ABF_1$ 的面积为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设不过原点 O 的直线交 C 于 M、N 两点，且直线 OM、MN、ON 的斜率依次成等比数列，求 $\triangle MON$ 面积的取值范围.

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=e^{ax}+\cos x$ ，$g(x)=\sin x+2$.

(1) 试研究 $F(x)=\frac{1}{6}x^3-x+g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的极值点；

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围.

请考生在 22、23 二题中任选一题作答. 注意：只能做所选定的题目. 如果多做，则按所做第一个题目计分，做答时，请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（本题满分 10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{2t}{1+t^2}+2 \\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 的方程为 $x-y-1=0$. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的极坐标方程；

(2) 点 P 的极坐标为 $\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$，设直线 l 与曲线 C 的交点为 A、B 两点，若线段 AB 的中点为 D，求线段 PD 的长.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（本题满分 10 分）

已知 a、b、c、d 均为正数，且 $ad=bc$.

(1) 证明：若 $a+d>b+c$，则 $|a-d|>|b-c|$；

(2) 若 $t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4}$，求实数 t 的取值范围.