德阳市高中2021级“三诊”试题

数学参考答案与评分标准

（文史类）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	B	A	D	C	D	A	A	D	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $\frac{\pi}{2}$　　14. $4\sqrt{3}$　　15. $\pm\sqrt{2}$　　16. 4.

三、解答题

17. 解：(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d

$\because 2a_1=2, a_5=5(a_4-a_3)$

$\therefore a_1+4d=5(a_1+3d-a_1-2d)$　　$\therefore a_1=d=1.$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 1=n$ ………………………………… 3分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q

若选条件①，$b_5=4(b_4-b_3)$

由$b_1=2$，且$b_5=4(b_4-b_3)$

得$b_1q^4=4(b_1q^3-b_1q^2)$

$\therefore q^2-4q+4=0$，解得$q=2$.

所以$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列.

故$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\in \mathbf{N}^*)$ ………………………………… 6分

若选条件②，$b_{n+1}=S_n+2$

令$n=1$，得$b_2=S_1+2=b_1+2=4$

$\therefore$ 公比$q=\frac{b_2}{b_1}=2$

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列.

从而 $b_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$ …………………………………………………… 6 分

(2) 因为 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$

两式相减，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

即 $\frac{1}{2}T_n=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. ………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1) 由于模型①残差波动小，应该选择模型①. …………………………………… 2 分

(2)(ⅰ) 剔除异常数据，即 3 月份的数据 ………………………………………………… 3 分

剩下数据的平均数为 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(7\times 6-7)=7$

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(30\times 6-30)=30$

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1470-210=1260$

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}=210$

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=370-49=321$

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\cdot\overline{x}^2=76$

$\therefore \hat{b}=\frac{105}{38}, \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=30-\frac{105}{38}\times 7=\frac{405}{38}$

$\therefore$ 所选模型的回归方程为 $\hat{y}=\frac{105}{38}x+\frac{405}{38}$. ………………………… 10 分

(ⅱ) 若广告投入量 $x=19$

则该模型收益的预报值是 $\frac{105}{38}\times 19+\frac{405}{38}=\frac{1200}{19}\approx 63.16$（万元）. …

……………………………………………………………………………………… 12 分

19. (1) 证明：连接 A_1B，A_1C.

因为 $\angle A_1AB=\angle A_1AC, AB=AC, AA_1=AA_1$

所以 $\triangle A_1AB \cong \triangle A_1AC$，所以 $A_1B=A_1C$.

因为 D 为 BC 的中点，所以 $BC\perp A_1D$. ………………………………… 2 分

因为 $AB=AC$，D 为 BC 的中点，所以 $BC\perp AD$.

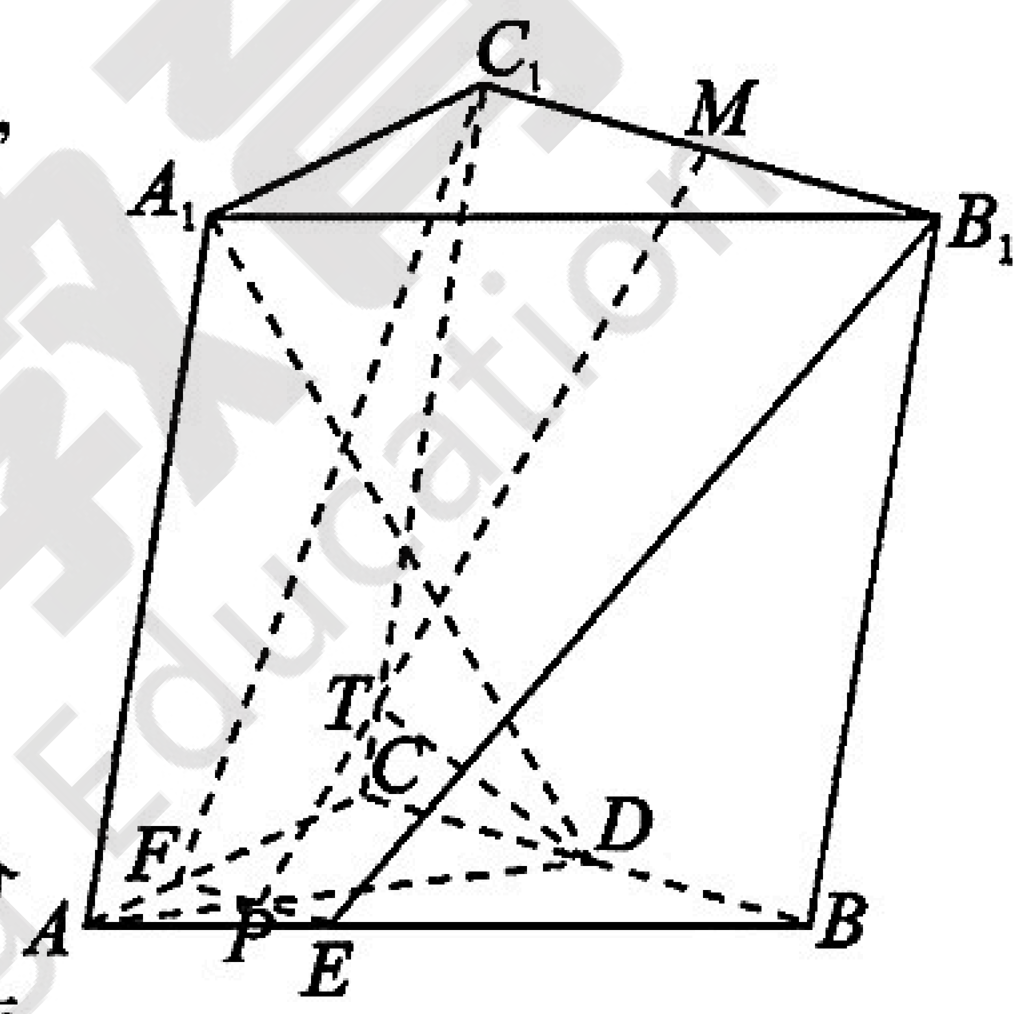
因为 $A_1D\cap AD=D$，A_1D，$AD\subset$ 平面 A_1AD

所以 $BC\perp$ 平面 A_1AD. ………………………………………………… 4 分

又 $B_1C_1 /\!/ BC$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1AD.

又 $B_1C_1\subset$ 平面 EB_1C_1F

所以平面 $A_1AD\perp$ 平面 EB_1C_1F. ………………………………… 6 分



(2) 解：由题意得：$AP=\frac{1}{3}AD=\sqrt{3}$，$PD=\frac{2}{3}AD=2\sqrt{3}$，

$EF=\frac{1}{3}BC=2$.

因为 $BC /\!/ B_1C_1$，$B_1C_1\subset$ 平面 EB_1C_1F，

$BC\not\subset$ 平面 EB_1C_1F

所以 $BC /\!/$ 平面 EB_1C_1F ………………… 8 分

所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的顶点 B 到底面 EB_1C_1F 的距离等于点 D 到底面 EB_1C_1F 的距离.

作 $DT\perp PM$，垂足为 T，则由(1)知，$DT\perp$ 平面 EB_1C_1F

故 $DT=PD\sin\angle MPD=3$.

底面 EB_1C_1F 的面积为 $\frac{1}{2}\times(B_1C_1+EF)\times PM=\frac{1}{2}(6+2)\times 6=24$.

所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times 24\times 3=24$. ………………… 12 分

20. 解：(1) 设椭圆半焦距 c

由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{2}(a+c)b=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$

解得：$a=2, b=1$

∴ 椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 4 分

(2) 由题意可设直线的方程为 $y=kx+m(k\neq 0,m\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$

消去 y 并整理，得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$

则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$ …………………………………… 6 分

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

又直线 OM、MN、ON 的斜率依次成等比数列

故$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2\Rightarrow-\frac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$

由 $m\neq 0$，得 $k^2=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$ …………………………………… 8 分

又由 $\triangle=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$，得：$0<m^2<2$

显然 $m^2\neq 1$（否则 $x_1x_2=0$，则 x_1、x_2 中至少有一个为 0，直线 OM、ON 中至少有一个斜率不存在，与已知矛盾）. …………………………………… 9 分

设原点 O 到直线 MN 的距离为 d，则

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{|m|}{2\sqrt{1+k^2}}\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$$

$$=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{-(m^2-1)^2+1}$$

由 $0<m^2<2$，且 $m^2\neq 1$，得 $S_{\triangle OMN}$ 的取值范围为 $(0,1)$. …………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)=2\ln x-x^2-1$，其定义域为 $(0,+\infty)$

则 $f'(x)=\frac{2}{x}-2x=-\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，$x>0$

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减.

故函数 $f(x)$ 有唯一极大值点 $x=1$. …………………………………… 4 分

(2) 由题意可得 $F'(x)=4a+\dfrac{2}{x}-2x, x>0$

令 $F'(x)=0$，解得 $x=a\pm\sqrt{a^2+1}$

因为 $x=a+\sqrt{a^2+1}>0, x=a-\sqrt{a^2+1}<0$

所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 $x_0=a+\sqrt{a^2+1}$ …………… 6 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $F(x)=0$ 且只有一个零点

所以 $F'(x_0)=0$ 且 $F(x_0)=0$ …………………………………………………… 8 分

即 $\begin{cases}\dfrac{2}{x_0}+4a-2x_0=0\\ 2\ln x_0+4ax_0-x_0^2-1=0\end{cases}$

消去 a 并整理得：$2\ln x_0+x_0^2-3=0$

令 $h(x)=2\ln x+x^2-3$，则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}+2x$

因为 $x>0$ 时 $h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

又 $h(1)=-2<0, h(2)=2\ln2+1>0$

所以 $1<x_0<2$. ………………………………………………………………… 10 分

又 $a=\dfrac{1}{2}\left(x_0-\dfrac{1}{x_0}\right)$，且函数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增

所以 $0<a<\dfrac{3}{4}$. ………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{2t}{1+t^2}+2\\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数)

消去参数 t 得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1(y\neq-1)$ ……… 4 分

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入直线 $l: x-y-1=0$

得直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$. ……………………………… 5 分

(2) 由点 P 的极坐标为 $\left(1,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，得点 P 的直角坐标为 $(0,-1)$.

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）

代入曲线 C 的普通方程得：$t^2-3\sqrt{2}t+4=0$ ………………………… 8 分

设 A、B 对应参数为 t_1、t_2，则 D 对应的参数为 $\dfrac{t_1+t_2}{2}$，$t_1+t_2=3\sqrt{2}$. … 9 分

故 $|PD|=\left|\dfrac{t_1+t_2}{2}\right|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1) 由 $(a+d)^2>(b+c)^2$ 及 $4ad=4bc$

得：$(a-d)^2>(b-c)^2$

所以 $|a-d|>|b-c|$. ………………………… 4 分

(2) 因为 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2$

$=(ac+bd)^2$ ………………………… 6 分

所以 $t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=t(ac+bd)$

由于 $\sqrt{a^4+c^4}\geqslant\sqrt{2}ac$，$\sqrt{b^4+d^4}\geqslant\sqrt{2}bd$ ………………………… 8 分

又已知 $t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4}$

则 $t(ac+bd)\geqslant\sqrt{2}(ac+bd)$，当 $a=c$，$b=d$ 时取等号.

故 $t\geqslant\sqrt{2}$. ………………………… 10 分