遂宁市高中 2024 届三诊考试

数学（理科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	B	A	C	C	D	B	A	C	D	D

13. $\frac{7}{5}$　　14. 3　　15. $\frac{3\sqrt{3}+4}{5}$　　16. $\left\{1,\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}$

三、解答题（共 70 分）

17.解：（1）该产品指标值 K 的平均值：

$(50\times0.015+60\times0.020+70\times0.035+80\times0.025+90\times0.005)\times10=68.5$

………5 分

（2）指标值 K 超过 65 的频率为

$(0.035+0.025+0.005)\times10=0.65$………………………………………

…………………………6 分

20 件产品中指标值超过 65 的件数为：$0.65\times20=13$

件……………………………………7 分

$P(X=0)=\frac{C_{13}^0C_7^2}{C_{20}^2}=\frac{21}{190}, P(X=1)=\frac{C_{13}^1C_7^1}{C_{20}^2}=\frac{91}{190},$

$P(X=2)=\frac{C_{13}^2C_7^0}{C_{20}^2}=\frac{78}{190}$

所以，分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{21}{190}$	$\frac{91}{190}$	$\frac{78}{190}$

………..10 分

$E(X)=0\times\frac{21}{190}+1\times\frac{91}{190}+2\times\frac{78}{190}=\frac{247}{190}$………………………………

………………………..12 分

18. 解：（1）证明：$AB // CD, AB\perp BC$　所以

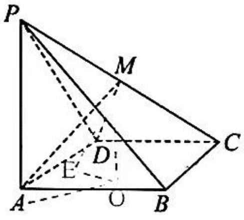
$CD \perp BC$ ....2 分

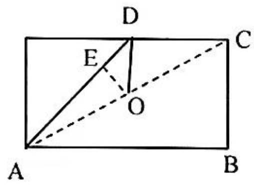
所以，$BC^2+CD^2=BD^2=2$

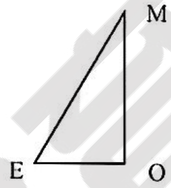
因为，$AD^2+BD^2=AB^2=4$， 所以，$AD\perp BD$ ....4 分

因为 ,面 PAD⊥面 ABCD ,$BD\subseteq$面ABCD 面 PAD∩面 ABCD=AD

所以，$BD\perp$面 PAD，所以，$BD\perp PD$............................5 分







（2）由（1）知 $BD\perp$面PAD，

$\because PA\subseteq$面PAD, $\therefore BD\perp PA$

因为，$PA^2+AB^2=PB^2\Rightarrow PA\perp AB$ 又 $AB\cap BD=B$

所以，$PA\perp$面 ABCD..7 分

法一：连接 AC,取 AC 中点 O,则 $MO\,//\,PA$,所以 $MO\perp$面 ABCD

作 $OE\perp AD$，垂足为 E,连接 ME,则 $\angle MEO$ 为二面角 $M-AD-B$ 的平面角..9 分

因为，$S_{\Delta ADO}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ADC}$， 所以，$\dfrac{1}{2}AD\times EO=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}CD\times BC$，

所以，$\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\times EO=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1$，所以 $EO=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

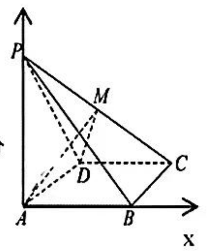
又 $MO=\dfrac{1}{2}PA=1$,所以 $ME=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$,所以 $\cos\angle MEO=\dfrac{1}{3}$ ....12 分

法二：

在面 ABCD 内作 $Ay\,//\,BC$,以 AB、Ay、AP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$

易知面 ABCD 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$.....................................8 分

因为，$P(0,0,2)$, $C(2,1,0)$, $M(1,\dfrac{1}{2},1)$, $A(0,0,0)$, $D(1,1,0)$



所以，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0),\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，设面 MAD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}x+y=0\\x+\frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$，所以

$\vec{n}=\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$ ……………………………………………………10 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\left|\frac{-\frac{1}{2}}{1\times\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}\right|=\frac{1}{3}$ ……………………………………12 分

19.【详解】(1) 由 $\vec{m}=(2x-1,1),\vec{n}=(1,2)$，得 $y=\vec{m}\cdot\vec{n}=2x+1$，直线 $L:y=2x+1$ ……………………………………………………1 分

$P_1(0,1)$，即

$a_1=0,b_1=1$ ……………………………………………………3 分

由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 1，得

$a_n=n-1$ ……………………………………………………4 分

$b_n=2a_n+1=2n-1$ ……………………………………………………5 分

(2) 设

$C_n=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ ……………………………………6 分

则

$\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ……………………………………7 分

$\therefore C_n-\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ……………………………………8 分

$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，

$\therefore C_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$ ………………………………………………………………………………………………9 分

$\because C_n=3-\frac{2n+3}{2^n}<3$ 恒成立，且

$C_4=3-\frac{11}{16}>2$ ……………………………………………………………………………………………………11 分

$\therefore$ 存在整数 k，使 $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}<k$ 对任意正整数 n 都成立，且 k 的最小值为 3..12 分

20（1）$f'(x)=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\cdot\frac{1}{x}=(2x-2)\ln x+x-2$ ……………………………2 分

所以，$f'(1)=-1$，又 $f(1)=0$，切点 $(1,0)$

所以，切线方程为：$y=-x+1$ ……………………………………………………………………………4 分

（2）方程 $f(x)=g(x)$ 有 2 个不等实数根

$\Leftrightarrow$ 函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 有 2 个零点，

$h(x)=f(x)-g(x)=(x^2-2ax)\ln x-\frac{1}{2}x^2+2ax$，$a>\frac{1}{2}$

因为 $a>\frac{1}{2}$ 所以 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-a\right)\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+a=(a-\frac{1}{4})\ln 2-\frac{1}{8}+a>0$

$h'(x)=2(x-a)\cdot\ln x$，…………………………………………………………………………………………6 分

令 $h'(x)=2(x-a)\cdot\ln x=0$，得 $x_1=1,x_2=a$

①当 $a>1$ 时，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right),h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增

$x\in(1,a),h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减

$x\in(a,+\infty),h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

所以，$y=h(x)$在$x=1$处取到极大值$h(1)=-\frac{1}{2}+2a>0$，

$y=h(x)$在$x=a$处取到极小值$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)$，

要使$y=h(x)$有 2 个零点，须$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)<0$

所以，$a>e^{\frac{3}{2}}$……………………………………8 分

②当$a=1$时，$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right),h'(x)\geq 0$，$h(x)$单调递增，所以$h(x)$至多一个零点，不合题意……………………………………9 分

③当$\frac{1}{2}<a<1$时，$x\in\left(\frac{1}{2},a\right),h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

$x\in(a,1),h'(x)<0$，$h(x)$单调递减

$x\in(1,+\infty),h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

求得，$y=h(x)$在$x=1$处取到极小值$h(1)=-\frac{1}{2}+2a$，

$y=h(x)$在$x=a$处取到极大值$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)>h(\frac{1}{2})$，

要使$y=h(x)$有 2 个零点，须$h(1)=-\frac{1}{2}+2a<0$

所以，$0<a<\frac{1}{4}$．（舍去）……………………………………11 分

综上，a的取值范围为，$a\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$……………………………………12 分

21．解：（1）由题意$4a=8,a+c=2+\sqrt{3}$……………………………………2 分

故$a=2,c=\sqrt{3},b=1$，所以椭圆 C 的标准方程为

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$..............................3 分

（2）由题意得，直线 m 的斜率存在,设 $G(x_3,y_3),H(x_4,y_4)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_3^{\ 2}}{4}+y_3^{\ 2}=1\\ \frac{x_4^{\ 2}}{4}+y_4^{\ 2}=1\end{cases}$，两式相减得

$\frac{x_3^{\ 2}-x_4^{\ 2}}{4}+y_3^{\ 2}-y_4^{\ 2}=0$......................................4 分

所以 $\frac{1}{4}+\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}\cdot\frac{y_3+y_4}{x_3+x_4}=0$，因为 G,H 中点坐标为 $(-1,\frac{1}{2})$ 在椭圆内部，所以 $\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{1}{2}$..5 分

故直线 m 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$ ....6 分

（3）因为直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴，

所以 $x_0y_0\neq0$．设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，所以

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

由题意得，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$，相减得

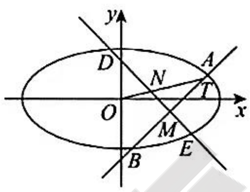
$\frac{x_1^2-x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0$...7 分

所以 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2y_0}{2x_0}=-\frac{1}{4}$，

所以

$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$..8 分



所以 $k_l = k_{AB} = -\dfrac{1}{4k_{OM}} = -\dfrac{x_0}{4y_0}$ ，

同理得，$k_{ON} \cdot k_{DE} = -\dfrac{1}{4}$ ，又 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\dfrac{1}{4}$ ，

相乘得，$k_{ON} \cdot k_{DE} \cdot k_{AB} \cdot k_{OM} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2$ ，

因为 $k_{DE} \cdot k_{AB} = -1, k_{OM} = \dfrac{y_0}{x_0}$ ，所以 $k_{ON} = -\dfrac{x_0}{16y_0}$ ，

则 l 的方程为 $y - y_0 = -\dfrac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$ ，直线 DE 的方程为

$y - y_0 = \dfrac{4y_0}{x_0}(x - x_0)$，

直线 ON 的方程为

$y = -\dfrac{x_0}{16y_0}x$ ……………………………………………………………………9 分

联立得，$y_T = -\dfrac{x_0^2 + 4y_0^2}{12y_0}, y_N = \dfrac{-3x_0^2 y_0}{x_0^2 + 64y_0^2}$ ，

故

$|\lambda| = \dfrac{|ON|}{|NT|} = \dfrac{|ON|}{|OT| - |ON|} = \dfrac{1}{\dfrac{|OT|}{|ON|} - 1}$ ……………………………………………

………………10 分

又

$$\frac{|OT|}{|ON|} = \left|\frac{y_T}{y_N}\right| = \left|\frac{-\dfrac{x_0^2 + 4y_0^2}{12y_0}}{\dfrac{-3x_0^2 y_0}{x_0^2 + 64y_0^2}}\right| = \frac{1}{36} \cdot \frac{\left(x_0^2 + 4y_0^2\right)\left(x_0^2 + 64y_0^2\right)}{x_0^2 y_0^2}$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{\left(1 + 4\dfrac{y_0^2}{x_0^2}\right)\left(1 + 64\dfrac{y_0^2}{x_0^2}\right)}{\dfrac{y_0^2}{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{36}\left(256\frac{y_0^2}{x_0^2} + \frac{x_0^2}{y_0^2} + 68\right) \geq \frac{25}{9}$$ ……………………………………………………………

…………………………11 分

当且仅当 $x_0^2 = 16y_0^2$ 即 $x_0 = \pm 4y_0$ 时取等号，

又 $\dfrac{x_0^2}{4} + y_0^2 < 1$ ，即当且仅当 $\begin{cases} x_0 = \pm 4y_0 \\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5} < y_0 < \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 时取等号，

所以$|\lambda|=\dfrac{1}{\dfrac{|OT|}{|ON|}-1}\le\dfrac{9}{16}$，故$\lambda$的最大值为

$\dfrac{9}{16}$……………………………………12 分

22．(1) 由题意得，曲线$C:(x-1)^2+y^2=9$，即$x^2+y^2-2x-8=0$，

∴曲线 C 的极坐标方程为

$\rho^2-2\rho\cos\theta-8=0$……………………………………2 分

∵直线 l 的极坐标方程为$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$，

∴直线 l 的直角坐标方程为

$x+y-2=0$……………………………………4 分

(2) 设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)，

代入$(x-1)^2+y^2=9$中，化简得

$t^2-\sqrt{2}t-8=0$……………………………………6 分

设 M，N 两点对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1+t_2=\sqrt{2}$，

$t_1t_2=-8$……………………7 分

则

$\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AN|}=\dfrac{|AM|+|AN|}{|AM|\cdot|AN|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{34}}{8}$……………

…………10 分

23．【详解】(1) 由题意可得，$|x+2|-|2x-2|\ge m$，

令

$f(x)=|x+2|-|2x-2|=\begin{cases}x-4,x\le-2\\ 3x,-2<x<1\\ -x+4,x\ge1\end{cases}$……………………………………

………………1 分

当$x\in(-\infty,-2]$时，$f(x)\in(-\infty,-6]$，

当$x\in(-2,1)$时，$f(x)\in(-6,3)$，

当$x\in[1,+\infty)$，$f(x)\in(-\infty,3]$

所以$f(x)$的最大值为

3……………………………………………………………………4

分

关于x的不等式$|x+2|-|2x-2|\geq m$有解等价于$f(x)_{\max}=3\geq m$，

综上所述，实数m的取值范围为$(-\infty,3]$……………………………………6分

（2）由（1）可知，m的取值范围为$(-\infty,3]$，且n为m的最大值，所以$n=3$，

则$a+3b+4c=3$，即$a+b+2b+4c=3$，

由柯西不等式可得

$\left[(a+b)^2+(2b)^2+c^2\right](1^2+1^2+4^2)\geq(a+b+2b+4c)^2=9$…………8分

当且仅当$\frac{a+b}{1}=\frac{2b}{1}=\frac{c}{4}$时，即$a=b=\frac{1}{12},c=\frac{2}{3}$时，等号成立……………………………9分

又$a^2+2ab+5b^2+c^2=(a+b)^2+4b^2+c^2$，

所以$18(a^2+2ab+5b^2+c^2)\geq9$，即

$a^2+2ab+5b^2+c^2\geq\frac{1}{2}$……………………………………………………10分