遂宁市高中 2024 届三诊考试

数学（文科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	B	A	C	C	A	B	A	D	C	D

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分）

13. $\frac{7}{5}$　14. 3　15. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$　16. $[-1,0]$

三、解答题（共 70 分）

17. 解（1）由甲商场分数的频率分布直方图，得对甲商场评分低于 40 分的频率为：

$(0.003+0.005+0.012+0.02)\times 10=0.4$ ……………………2 分

$\therefore$ 对甲商场评分低于 40 分的人数为 $100\times 0.4=40$ 人 ……………………4 分

（2）对乙商场评分在 $[0,10)$ 范围内的有 2 人，设为 m,n ……………………5 分

对乙商场评分在 $[10,20)$ 范围内的有 3 人，设为 a,b,c ……………………6 分

从这 5 人中随机选出 2 人的选法为：

$mn,ma,mb,mc,na,nb,nc,ab,ac,bc$，共 10 种……………………8 分

其中 2 人评分都在 $[10,20)$ 范围内的选法包括：ab,ac,bc，共 3 种……………………10 分

故 2 人评分都在 $[10,20)$ 范围内的概率为

$P=\dfrac{3}{10}$……12分

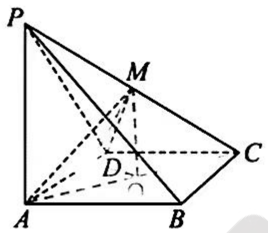
18．解：（1）证明：$AB//CD, AB\perp BC$ 所以 $CD\perp BC$……2分

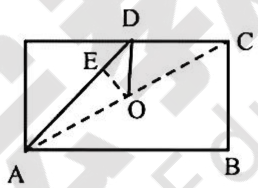
所以，$BC^2+CD^2=BD^2=2$

因为，$AD^2+BD^2=AB^2=4$，所以，$AD\perp BD$……4分

因为，面PAD⊥面ABCD, $BD\subseteq$面ABCD, 面PAD∩面ABCD=AD

所以，$BD\perp$面PAD，所以，$BD\perp PD$……5分





(2) 由 (1) 知$BD\perp$面PAD，

$\because PA\subseteq$面PAD, $\therefore BD\perp PA$

因为，$PA^2+AB^2=PB^2\Rightarrow PA\perp AB$又$AB\cap BD=B$

所以，$PA\perp$面ABCD……7分

连接AC，取AC中点O，则$MO//PA$，所以$MO\perp$面ABCD……9分

又

$MO=\dfrac{1}{2}PA=1$,……10分

$V_{C-AMD}=V_{M-ACD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot MO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{6}$……12分

19.【详解】(1) 由$\vec{m}=(2x-1,1),\vec{n}=(1,2)$，得$y=\vec{m}\cdot\vec{n}=2x+1$，直线

$L:y=2x+1$ ...1分

$P_1(0,1)$，即

$a_1=0,b_1=1$ ……………………………………………………………………

.....3分

由等差数列$\{a_n\}$的公差为1，得

$a_n=n-1$ ………………………………………………………………4分

$b_n=2a_n+1=2n-1$ ……………………………………………………………

………………………5分

(2) 设

$C_n=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ ……………………………………

………………6分

则

$\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ………………………………………………………

……………7分

$\therefore C_n-\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2}C_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ……………………………

……………………8分

$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，

$\therefore C_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$ ……………………………………………………………………

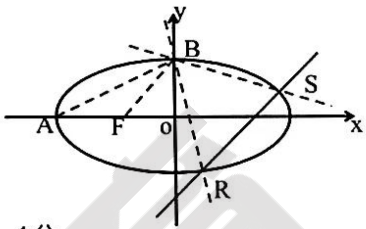
………………………9分

$\because C_n=3-\frac{2n+3}{2^n}<3$恒成立，且

$C_4=3-\frac{11}{16}>2$ ……………………………………………………………………

………………………11分

$\therefore$存在整数k，使$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}<k$对任意正整数$n$都成立，且$k$的最小值为3..12分



20. 解：(1) $|BF|=\sqrt{|OF|^2+|OB|^2}=\sqrt{c^2+b^2}=a=2$

$|AB|^2=a^2+b^2=5$，所以$b=1$............................2分

所以，椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$..................................4分

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$...5分

(2) 设直线l的方程：$x=my+n(m\neq0)$，

$R(x_1,y_1),S(x_2,y_2)\quad(x_1x_2\neq0)$

联立，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\x=my+n\end{cases}$，消去$x$得，$(m^2+4)y^2+2mny+n^2-4=0$

所以，

$y_1+y_2=\frac{-2mn}{m^2+4},y_1y_2=\frac{n^2-4}{m^2+4}$..

........7分

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}$$

$$=\frac{y_1-1}{my_1+n}+\frac{y_2-1}{my_2+n}=\frac{(y_1-1)(my_2+n)+(y_2-1)(my_1+n)}{(my_1+n)(my_2+n)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+(n-m)(y_1+y_2)-2n}{m^2y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2}$$

$$=\frac{2m\frac{n^2-4}{m^2+4}+(n-m)\frac{-2mn}{m^2+4}-2n}{m^2\frac{n^2-4}{m^2+4}+mn\frac{-2mn}{m^2+4}+n^2}$$

$$=\frac{2m(n^2-4)+(n-m)(-2mn)-2n(m^2+4)}{m^2(n^2-4)+mn(-2mn)+n^2(m^2+4)}$$

$=\dfrac{-8(m+n)}{4(n^2-m^2)}=\dfrac{2}{m-n}=-1$ ……………………………………………………

……………………10分

所以，$n=m+2$，所以，直线l的方程为$x-2=m(y+1)$

所以，直线l过定点（2,

−1）……………………………………………………………………12分

21（1）

$f'(x)=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\cdot\dfrac{1}{x}=(2x-2)\ln x+x-2$ …………………

……2分

所以，$f'(1)=-1$，又$f(1)=0$，切点$(1,0)$

所以，切线方程为：

$y=-x+1$ ………………………………………………………………………4分

(2) 方程$f(x)=g(x)$有2个不等实数根

$\Leftrightarrow$ 函数$h(x)=f(x)-g(x)$有2个零点，

$h(x)=f(x)-g(x)=(x^2-2ax)\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+2ax$，$a>\dfrac{1}{2}$

因为$a>\dfrac{1}{2}$所以

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{4}-a\right)\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+a=(a-\dfrac{1}{4})\ln 2-\dfrac{1}{8}+a>0$

$h'(x)=2(x-a)\cdot\ln x$，……………………………………………………………

……………………6分

令$h'(x)=2(x-a)\cdot\ln x=0$，得$x_1=1,x_2=a$

①当$a>1$时，$x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

$x\in(1,a),h'(x)<0$，$h(x)$单调递减

$x\in(a,+\infty),h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

所以，$y=h(x)$在$x=1$处取到极大值$h(1)=-\frac{1}{2}+2a>0$，

$y=h(x)$在$x=a$处取到极小值$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)$，

要使$y=h(x)$有 2 个零点，须$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)<0$

所以

$a>e^{\frac{3}{2}}$……………………………………………………..8 分

②当$a=1$时，$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$h'(x)\geq 0$，$h(x)$单调递增，所以$h(x)$至多一个零点，不合题意……………………………………………………9 分

③当$\frac{1}{2}<a<1$时，$x\in\left(\frac{1}{2},a\right)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

$x\in(a,1)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减

$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

求得，$y=h(x)$在$x=1$处取到极小值$h(1)=-\frac{1}{2}+2a$，

$y=h(x)$在$x=a$处取到极大值$h(a)=a^2\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)>h(\frac{1}{2})$，

要使$y=h(x)$有 2 个零点，须$h(1)=-\frac{1}{2}+2a<0$

所以，$0<a<\frac{1}{4}$．（舍去）……………………………………………11 分

综上，a的取值范围为，$a\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$……………………………………12 分

22. (1) 由题意得，曲线$C:(x-1)^2+y^2=9$，即$x^2+y^2-2x-8=0$，

∴曲线 C的极坐标方程为

$\rho^2-2\rho\cos\theta-8=0$ ……………………………………………………2分

∵直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$，

∴直线 l 的直角坐标方程为

$x+y-2=0$ ……………………………………………………4分

(2) 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数），

代入 $(x-1)^2+y^2=9$ 中，化简得

$t^2-\sqrt{2}t-8=0$ ……………………………………………………6分

设 M，N 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\sqrt{2}$，

$t_1t_2=-8$ ………………………7分

则

$$\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}=\frac{|AM|+|AN|}{|AM|\cdot|AN|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{34}}{8}$$ …………………

…………10分

23.【详解】(1) 由题意可得，$|x+2|-|2x-2|\geq m$，

令

$$f(x)=|x+2|-|2x-2|=\begin{cases}x-4,x\leq-2\\ 3x,-2<x<1\\ -x+4,x\geq1\end{cases}$$ ……………………………………………

…………1分

当 $x\in(-\infty,-2]$ 时，$f(x)\in(-\infty,-6]$，

当 $x\in(-2,1)$ 时，$f(x)\in(-6,3)$，

当 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\in(-\infty,3]$

所以 $f(x)$ 的最大值为

3……………………………………………………………………4分

关于x的不等式$|x+2|-|2x-2|\ge m$有解等价于

$f(x)_{\max}=3\ge m$，

综上所述，实数m的取值范围为

$(-\infty,3]$……………………………………………………………6分

(2) 由 (1) 可知，m的取值范围为$(-\infty,3]$，且n为m的最大值，所以$n=3$，

则$a+3b+4c=3$，即$a+b+2b+4c=3$，

由柯西不等式可得

$\left[(a+b)^2+(2b)^2+c^2\right](1^2+1^2+4^2)\ge(a+b+2b+4c)^2=9$……………8分

当且仅当$\frac{a+b}{1}=\frac{2b}{1}=\frac{c}{4}$时，即$a=b=\frac{1}{12},c=\frac{2}{3}$时，等号成立………………………………9分

又$a^2+2ab+5b^2+c^2=(a+b)^2+4b^2+c^2$，

所以$18(a^2+2ab+5b^2+c^2)\ge 9$，即

$a^2+2ab+5b^2+c^2\ge\frac{1}{2}$……………………………………10分