

泸州市高 2021 级第三次教学质量诊断性考试

数 学 (文科)

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分. 第 I 卷 1 至 2 页, 第 II 卷 3 至 4 页. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑.
3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内, 作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚, 写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

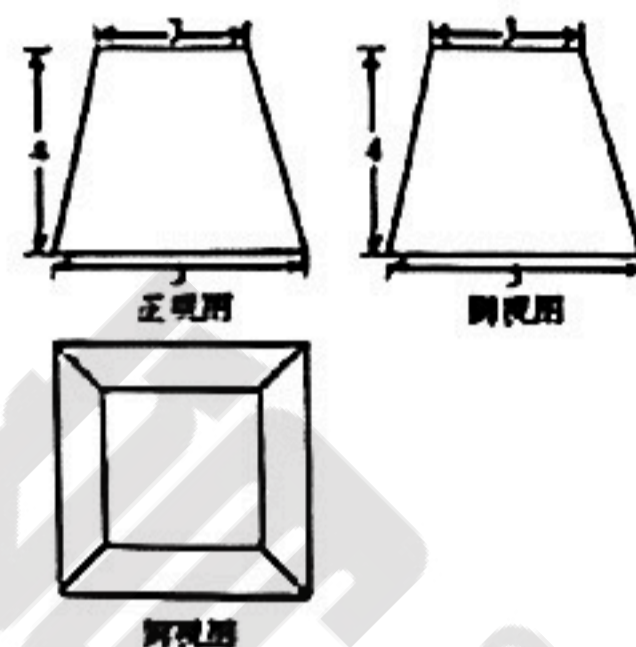
1. 已知复数 z 满足 $(2-i) \cdot z = 5i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$
 - A. $\sqrt{3}$
 - B. 3
 - C. $\sqrt{5}$
 - D. 5
2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{0, a\}$, 若 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素, 则实数 a 的取值范围为
 - A. $(-1, 3)$
 - B. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
 - C. $(-3, 1)$
 - D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线相互垂直, 焦距为 12, 则该双曲线的虚轴长为
 - A. $12\sqrt{2}$
 - B. $9\sqrt{2}$
 - C. $6\sqrt{2}$
 - D. 6
4. 从 3, 4, 5, 6, 7 这 5 个数中任取两个数, 则所取两个数之积能被 3 整除的概率是
 - A. $\frac{3}{5}$
 - B. $\frac{4}{5}$
 - C. $\frac{7}{10}$
 - D. $\frac{3}{10}$
5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -14$, $a_2 + a_4 = -20$, 则 S_n 取最小值时, n 的取值为
 - A. 6
 - B. 7
 - C. 7 或 8
 - D. 8 或 9

6. 一组数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 满足 $x_l - x_{l-1} = 2 (2 \leq l \leq 10)$, 若去掉 x_1, x_{10} 后组成一组新数据, 则新数据与原数据相比, 下列说法正确的是

- A. 方差变小 B. 平均数变大 C. 极差变大 D. 中位数变小

7. 《九章算术》是一本综合性的历史著作, 全书总结了战国、秦、汉时期的数学成就, 标志着中国古代数学形成了完整的体系. 在书中的《商功》一章里记录了“方亭”

的概念, 如图是一个“方亭”的三视图, 则它的侧面积为



- A. $16\sqrt{17}$ B. $16\sqrt{15}$
C. 64 D. $8\sqrt{17}$

8. 已知点 $M(4,4)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, F 为 C 的焦点, 直线 MF 与 C 的准线相交于点 N ,

则 $|NF| =$

- A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{15}{4}$

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{2\pi}{3}) (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi]$ 有且仅有三个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}]$ B. $(\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$ D. $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$

10. 已知函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(x) + f(4-x) = 0$, 若函数 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{x-2}$ 图象的交点横坐标分别为

x_1, x_2, \dots, x_n , 则 $\sum_{i=1}^n x_i =$

- A. $4n$ B. $2n$ C. n D. 0

11. 已知圆锥的体积为 24π , 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的内切球的表面积为

- A. 4π B. 8π C. 12π D. 16π

12. 已知 $x > 0, e^x + \ln y = 1$, 给出下列不等式

- (1) $x + \ln y < 0$; (2) $e^x + y > 2$; (3) $\ln x + e^y < 0$; (4) $x + y > 1$

其中一定成立的个数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

注意事项：

(1) 非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上，作图题可先用铅笔绘出，确认后先用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，答在试题卷和草稿纸上无效。

(2) 本部分共 10 个小题，共 90 分。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题纸上）。

13. 已知函数 $f(x) = (\frac{a}{2^x + 1} - 1)\sin x$ 是偶函数，则实数 $a =$ _____。

14. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$ ，且 $(a-b) \cdot b = 0$ ，则 a 与 b 夹角的大小为 _____。

15. 已知直线 $l: mx - y = 1$ ，动直线 l 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ 截得弦长的最小值为 _____。

16. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_1 = 1$ ， $na_{n+1} = (n+2)S_n$ ，则 $a_n =$ _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

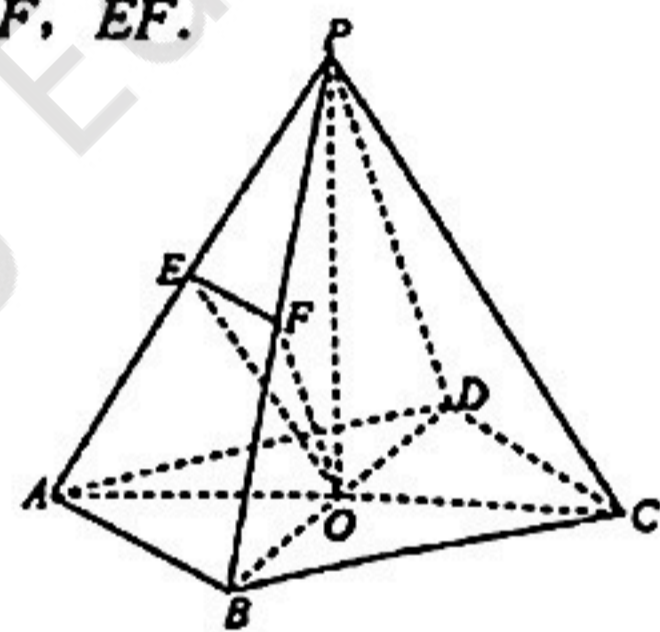
(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ， AC 与 BD 交于点 O ， $OP \perp$ 底面 $ABCD$ ， $OP = \sqrt{3}$ ，点 E, F 分别是棱 PA, PB 的中点，连接 OE, OF, EF 。

(I) 求证：平面 $OEF \parallel$ 平面 PCD ；

(II) 求三棱锥 $O-ABE$ 的体积。



18. (本小题满分 12 分)

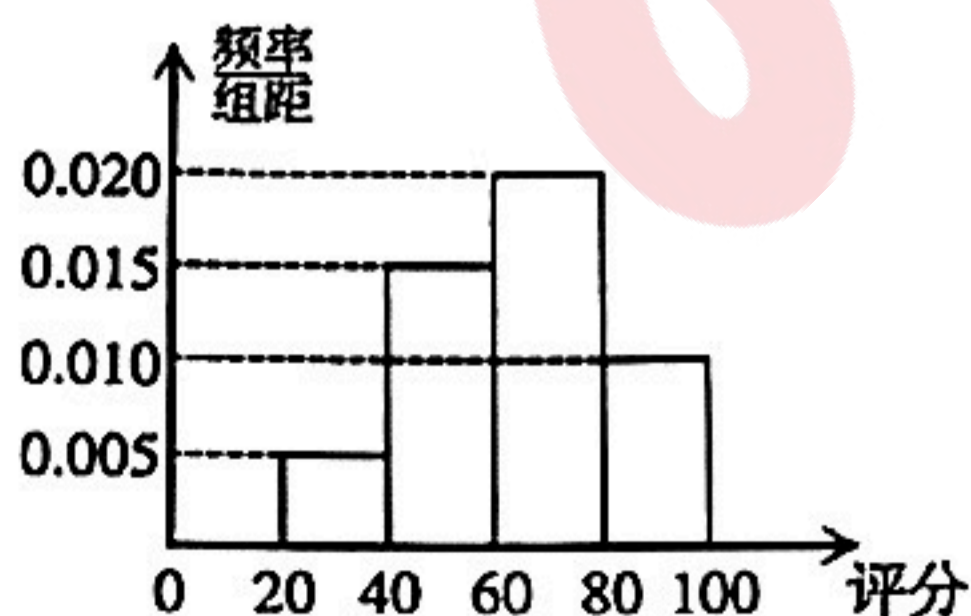
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a^2 = b^2 + c^2 - 48$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ 。

(I) 求 $\tan A$ 的值；

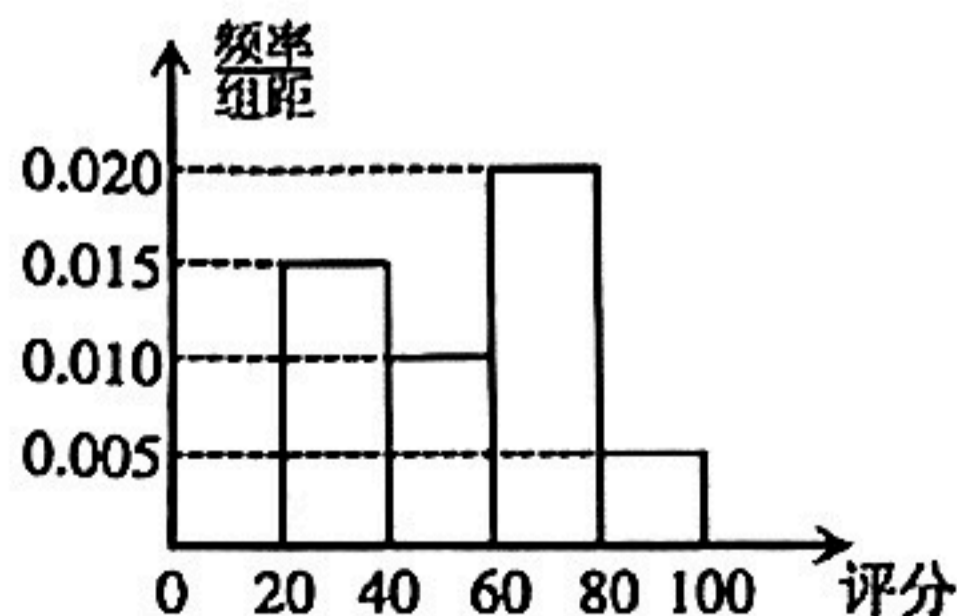
(II) 若 D 是 AC 边的中点， $B = \frac{\pi}{3}$ ，求 BD 的长。

19. (本小题满分 12 分)

随着全国新能源汽车推广力度的加大，新能源汽车消费迎来了前所未有的新机遇。某公司生产了 A、B 两种不同型号的新能源汽车，为了解大众对生产的新能源汽车的接受程度，公司在某地区采用随机抽样的方式进行调查，对 A、B 两种不同型号的新能源汽车进行综合评估（得分越高接受程度就越高），综合得分按照 $[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$ 分组，绘制成评估综合得分的频率分布直方图（如图）：



A 型号评估综合得分频率分布直方图



B 型号评估综合得分频率分布直方图

(I) 以综合得分的平均数为依据，判断 A、B 两种不同型号的新能源汽车哪种型号更受大众喜欢；

(II) 为进一步了解该地区新能源汽车销售情况, 某机构根据统计数据, 用最小二乘法得到该地区新能源汽车销量 y (单位: 万台) 关于年份 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 4.7x - 9495.2$, 且销量 y 的方差 $s_y^2 = 50$, 年份 x 的方差为 $s_x^2 = 2$. 求 y 与 x 的相关系数 r , 并据此判断该地区新能源汽车销量 y 与年份 x 的相关性强弱.

参考公式: (i) 线性回归方程: $\hat{y} = \hat{b}x + a$, 其中 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $a = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$;

(ii) 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ (若 $r \in [0, 0.25]$, 则相关性较弱; 若 $r \in [0.30, 0.75]$,

则相关性较强; 若 $r \in [0.75, 1]$, 则相关性很强).

20. (本小题满分 12 分)

如图, 已知 A, B 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和上顶点, 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle ABO$ (O 是坐标原点) 的面积为 1.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 若过点 $P(a, b)$ 的直线与椭圆 E 相交于 M, N 两点, 过点 M 作 x 轴的平行线分别与直线 AB, NB 交于点 C, D . 证明: M, C, D 三点的横坐标成等差数列.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = e^{x-1}$, $g(x) = \ln x + b$.

(I) 求函数 $F(x) = (x-1)f(x)$ 的单调区间;

(II) 若总存在两条直线和曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 都相切, 求 b 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程.

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$. 以

原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C_1 和 C_2 的极坐标方程;

(II) 若直线 $l: y = kx$ (其中 $k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$) 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A, B (A, B 异于原

点), 求 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

设函数 $f(x) = |2x - 2| + |x + 2|$.

(I) 解不等式 $f(x) \leq 6 - x$;

(II) 设函数 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b, c 满足 $a + b + c = T$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{3}$.