2021 级高三下期绵阳三诊热身考试试题
理科数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	A	B	C	C	C	B	A	D	A	D

二、填空题

13．30　　14.3　　15. $\left[\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$　　16. $\dfrac{32\pi}{3}$

三、解答题

17.（I）由题意，得 $(0.02+0.032+a+0.018)\times 10=1$，　解得 $a=0.03$；

又由最高矩形中点的的横坐标为 20，可估计盒子中小球重量的众数约为 20（克）

而 50 个样本小球重量的平均值为：$\bar{X}=0.2\times 10+0.32\times 20+0.3\times 30+0.18\times 40=24.6$（克）

故由样本估计总体，可估计盒子中小球重量的平均值约为 24.6 克；

（II）利用样本估计总体，该盒子中小球重量在 $(5,15]$ 内的概率为 0.2

则 $X\sim B(3,\frac{1}{5})$. X 的可能取值为 0、1、2、3，

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，　$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{125}$，　$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$.

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$\therefore EX=0\times\frac{64}{125}+1\times\frac{48}{125}+2\times\frac{12}{125}+3\times\frac{1}{125}=\frac{3}{5}$.（或者 $EX=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$）

18.（1）设等差数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d，则 $\frac{S_4}{4}=\frac{S_1}{1}+3d$，即 $S_1+3d=5$，①

因为 $S_2=a_1+a_2=S_1+4$，所以由 $\frac{S_2}{2}=\frac{S_1}{1}+d$，得 $S_1+2d=4$．②

由①、②解得 $S_1=2,d=1$，所以 $\frac{S_n}{n}=n+1$，即 $S_n=n(n+1)$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，上式也成立，

所以 $a_n=2n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）由（1）可知 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_n}{a_{n+2}}=\frac{2n}{2n+4}=\frac{n}{n+2}$，

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{1}{3}\times 6=\frac{12}{n(n+1)}$，

因为 $b_1=6$ 满足上式，所以 $b_n=\frac{12}{n(n+1)}=12\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

$$T_n=12\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=12\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=12-\frac{12}{n+1}.$$

19.（1）证明：因为 $AC=2BC=2$，所以 $BC=1$.

因为 $2\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sin B}$，所以 $\sin B=1$，即 $AB\perp BC$.

又因为平面 $ABC\perp$ 平面 B_1C_1CB，平面 $ABC\cap$ 平面 $B_1C_1CB=BC$，$AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $AB\perp$ 平面 B_1C_1CB.

又 $B_1C\subset$ 平面 B_1C_1CB，所以 $AB\perp B_1C$，

在 $\triangle B_1BC$ 中，$B_1B=2$，$BC=1$，$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$，

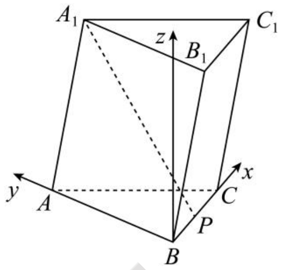
所以 $B_1C^2=B_1B^2+BC^2-2B_1B\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3$，即 $B_1C=\sqrt{3}$，所以 $B_1C\perp BC$.

而 $AB\perp B_1C$，$AB\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$AB\cap BC=B$，

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC.

又 $B_1C\subset$ 平面 ACB_1，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ACB_1.

（2）以 B 为坐标原点，以 BC 为 x 轴，BA 为 y 轴，过 B 作平面 ABC 的垂线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系：则 $B(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，



$\because B_1C\perp$ 平面 ABC，$\therefore B_1\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\therefore \overrightarrow{BB_1}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，

在三棱柱中，$AA_1//BB_1//CC_1$，可得 $C_1\left(2,0,\sqrt{3}\right)$，$A_1\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

$\because P$ 为 BC 中点，$\therefore P\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1P}=\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB_1}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CB_1}=\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

设平面 ACB_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CB_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0\\ \sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，可得 $y=1,z=0$，

则 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

设直线 A_1P 与平面 ACB_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{A_1P},\vec{n}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{A_1P}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1P}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}+0}{\frac{5}{2}\times 2}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{10}$，

故直线 A_1P 与平面 ACB_1 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

20.（1）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=\left(ae^x-1\right)\left(2e^x+1\right)$，

（i）若 $a\le 0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减.

（ii）若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增.

（2）（i）若 $a\le 0$，由（1）知，$f(x)$ 至多有一个零点.

（ii）若 $a>0$，由（1）知，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$.

①当 $a=1$ 时，由于 $f(-\ln a)=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点；

②当 $a\in(1,+\infty)$ 时，由于 $1-\dfrac{1}{a}+\ln a>0$，即 $f(-\ln a)>0$，故 $f(x)$ 没有零点；

③当 $a\in(0,1)$ 时，$1-\dfrac{1}{a}+\ln a<0$，即 $f(-\ln a)<0$.

又 $f(-2)=a\mathrm{e}^{-4}+(a-2)\mathrm{e}^{-2}+2>-2\mathrm{e}^{-2}+2>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点.

设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$，则 $f(n_0)=\mathrm{e}^{n_0}\left(a\mathrm{e}^{n_0}+a-2\right)-n_0>\mathrm{e}^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$.

由于 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)>-\ln a$，因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,1)$.

21.（1）将点 $E(1,-2\sqrt{2})$ 代入抛物线方程，可得 $(-2\sqrt{2})^2=2p\times1$，解得 $p=4$，

所以抛物线方程为 $y^2=8x$，

设直线 AB 的方程为：$y=kx+m(k\neq0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+m\\y^2=8x\end{cases}$，消去 y 得 $k^2x^2+(2km-8)x+m^2=0$，$k\neq0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{8-2km}{k^2},x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2}$，

根据抛物线定义：$|AF|+|BF|=x_1+x_2+4=\dfrac{8-2km}{k^2}+4=8$，可得 $m=\dfrac{4}{k}-2k$，

此时 $\Delta=(2km-8)^2-4k^2m^2=32(2-km)=64(k^2-1)>0$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$，

设 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2\\y_0=kx_0+m=2k+m\end{cases}$，

可得 AB 的垂直平分线方程为：$y-2k-m=-\dfrac{1}{k}(x-2)$，

将 $m=\dfrac{4}{k}-2k$ 代入整理得：$y=-\dfrac{1}{k}(x-6)$，故 AB 的垂直平分线过定点 $(6,0)$.

（2）由（1）可得$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{8-2km}{k^2}\right)^2-\frac{4m^2}{k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{8\sqrt{1-k^2}}{k^2}$，

且点$M(6,0)$到直线AB的距离$d=\frac{|6k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{4\left|k+\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，

则$\triangle ABM$的面积为$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{16\sqrt{k^2-1}\left|k+\frac{1}{k}\right|}{k^2}$，

可得$S^2=\frac{256(k^2-1)\left(k^2+\frac{1}{k^2}+2\right)}{k^4}=256\left(1+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^4}-\frac{1}{k^6}\right)$，

设$\frac{1}{k^2}=t$，设$f(t)=1+t-t^2-t^3\ (0<t<1)$，则$f'(t)=1-2t-3t^2$

令$f'(t)>0$，解得$0<t<\frac{1}{3}$；令$f'(t)<0$，解得$\frac{1}{3}<t<1$；

则$f(t)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减.

所以当$t=\frac{1}{3}$时，$\triangle ABM$的面积取最大值，此时$k^2=3$，即$k=\pm\sqrt{3}$．此时$AB:y=\pm\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

22.（1）曲线C_1的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=0$，即$\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta-1=0$，

则曲线C_1的直角坐标方程为$\sqrt{3}x-y+1=0$，

把参数方程平方相加得曲线C_2的普通方程为$x^2+y^2=4$.

（2）易知点P在直线$\sqrt{3}x-y+1=0$上，且该直线的斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，

则曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

联立曲线C_1的参数方程与曲线C_2的普通方程得$t^2+\sqrt{3}t-3=0$，

设点A，B在直线$\sqrt{3}x-y+1=0$上对应的参数分别为t_1，t_2，

由韦达定理可得$t_1+t_2=-\sqrt{3}$，$t_1t_2=-3$，

$\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_2|-|t_1|}{|t_1t_2|}=\pm\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

23．（1）因为$4x^2+y^2+z^2=3$，所以$(2x)^2+y^2+z^2=3$，

又 x、y、z 均为正实数，

由柯西不等式有$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[(2x)^2+y^2+z^2\right]\geq(2x+y+z)^2$，

所以$2x+y+z\leq3$，当且仅当$2x=y=z$且$4x^2+y^2+z^2=3$，

即$2x=y=z=1$时，等号成立，所以$2x+y+z$的最大值为 3.

（2）因为$y=2x$，$x>0$，$y>0$，$z>0$，

由（1）得$2x+y+z=4x+z\leq3$，

即$0<4x+z\leq3$，所以$\frac{1}{4x+z}\geq\frac{1}{3}$，

当且仅当$2x=z=1$时，等号成立，

因为$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(4x+z)=5+\left(\frac{z}{x}+\frac{4x}{z}\right)\geq5+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{4x}{z}}=9$，

当且仅当$\frac{4x}{z}=\frac{z}{x}$，即$z=2x=1$时，等号成立，

因为$\frac{1}{4x+z}\geq\frac{1}{3}$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{4x+z}\geq3$，即$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq3$.