2024 年 4 月

绵阳南山中学高 2021 级高三下期绵阳三诊热身考试试题

理科数学

命题：汪琨　　审题：黄磊

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。）

1．已知集合 $M=\left\{x \mid x^2-3x-4<0\right\}, N=\{x \mid y=\ln(x-1)\}$，则 $M \cap N=$（　）

A．$(1,4)$　　B．$[1,4)$　　C．$(-1,4)$　　D．$[-1,4)$

2．若复数 z 满足 $z\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)=2$，则 $|z|=$（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a+2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 $a=$（　）.

A．-1　　B．1　　C．-3　　D．3

4．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{5}$，则 $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=$（　）

A．36　　B．-36　　C．32　　D．-32

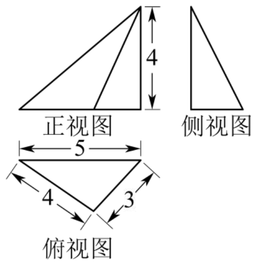
5．已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和为（　）

A．30 或 40　　B．31 或 40　　C．31　　D．30

6．点 P 在圆 C：$(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 上，$A(3,0)$，$B(0,1)$，则 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=$（　）

A．8　　B．6　　C．4　　D．2

7．某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的表面积（单位：cm^2）是（　）



A．24　　B．28

C．32　　D．36

8．若 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\triangle ABC$ 的面积 $S=a^2\sin C$，$c=6$，角 C 平分线 CM 交边 AB 于点 M，则 AM 的长为（　）

A．2　　B．4　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

9．设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}),(\omega>0)$，若存在 $x_1,x_2\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3\omega}]$，且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=1$，则 ω 的取值范围是（　）

A．$[4,+\infty)$　　B．$(4,6]$　　C．$[6,+\infty)$　　D．$(6,10]$

10．将甲、乙、丙、丁 4 名医生随机派往①，②，③三个村庄进行义诊活动，每个村庄至少派 1 名医生，A 表示事件“医生甲派往①村庄”；B 表示事件“医生乙派往①村庄”；C 表示事件“医生乙派往②村庄”，则（　　）

A．事件 A 与 B 相互独立　　B．事件 A 与 C 相互独立

C．$P(B|A)=\frac{5}{12}$　　D．$P(C|A)=\frac{5}{12}$

11．若实数 x，y 满足 $4\ln x+2\ln y\geq x^2+4y-4$，则（　）

A．$xy=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$x+y=\sqrt{2}$　　C．$x+y=1+\sqrt{2}$　　D．$x^3y=1$

12．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，以 F_2 为圆心的圆与 x 轴交于 F_1，B 两点，与 y 轴正半轴交于点 A，线段 AF_1 与 C 交于点 M .若 $|BM|$ 与 C 的焦距的比值为 $\frac{\sqrt{31}}{3}$，则 C 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

二、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13．$(x+y)(x-2y)^5$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为______．（用数字作答）

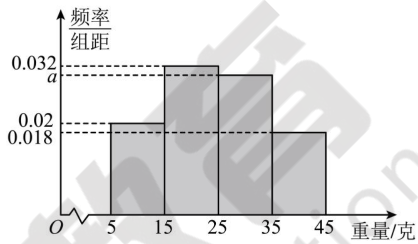
14．已知 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\sin x+\cos x=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=$______．

15．若 x_1,x_2 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-e^x+1(a\in\mathbf{R})$ 的两个极值点，且 $\frac{x_2}{x_1}\geq 2$，则实数 a 的取值范围为____________．

16．将正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，当 $AC=2\sqrt{3}$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则该三棱锥外接球的体积为________.

三、解答题：（共 70 分）

17．一个盒子中装有大量形状大小一样但重量不尽相同的小球，从中随机抽取 50 个作为样本，称出它们的重量(单位：克)，重量分组区间为 $[5,15]$，$(15,25]$，$(25,35]$，$(35,45]$，由此得到样本的重量频率分布直方图(如图).



（1）求 a 的值，并根据样本数据，试估计盒子中小球重量的众数与平均值；

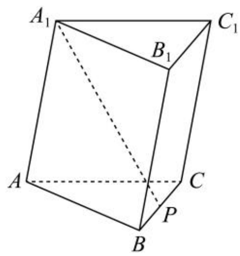
（2）从盒子中随机抽取 3 个小球，其中重量 $[5,15]$ 内的小球个数为 X，求 X 的分布列和数学期望.（以直方图中的频率作为概率）

18．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=4, S_4=20$，且 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列.

(1)求证：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=6$，且 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BB_1=2BC=2$，$\angle CBB_1=2\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，且平面 $ABC\perp$ 平面 B_1C_1CB.



（1）求证：平面 $ABC\perp$ 平面 ACB_1；

（2）设点 P 为直线 BC 的中点，求直线 A_1P 与平面 ACB_1 所成角的正弦值.

20．已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

21．已知点 $E(1,-2\sqrt{2})$ 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，A,B 为抛物线 C 上两个动点，AB 不垂直 x 轴，F 为焦点，且满足 $|AF|+|BF|=8$．

(1)求 p 的值，并证明：线段 AB 的垂直平分线过定点；

(2)设（1）中定点为 M，当 $\triangle ABM$ 的面积最大时，求直线 AB 的方程.

22．在极坐标系中，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=0$，以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴，建立直角坐标系，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）．

(1)写出 C_1 的直角坐标方程和 C_2 的普通方程；

(2)已知点 $P(0,1)$，C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，求 $\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}$ 的值.

23．已知 x、y、z 均为正实数，且 $4x^2+y^2+z^2=3$．

(1)求 $2x+y+z$ 的最大值；

(2)若 $y=2x$，证明：$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq 3$．