2024年4月

命题人:宋玉贤 审题人:尹冰

1. 设集合 $A=\left\{x\middle|-2<x<0\right\}$,$B=\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$. 则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-2<x<1\right\}$

C. $\left\{x\middle|-1\leqslant x<0\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-2<x\leqslant 1\right\}$

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{z}{1+2i}=\mathrm{i}^{2024}$(i 为虚数单位),则 $|z|=$ (　　)

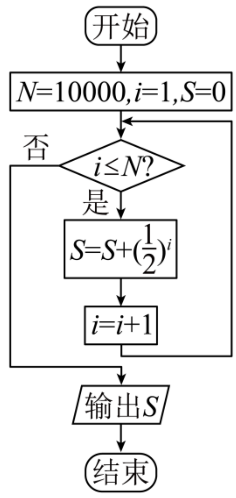
A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

3. 在直角坐标系 xOy 中,向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(5,m)$,$\overrightarrow{OC}=(7,3)$,其中 $m\in R$,若 A,B,C 三点共线,则实数 m 的值为 (　　)

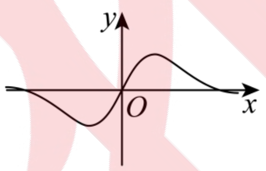
A. $\dfrac{3}{5}$　　B. -7　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. 2

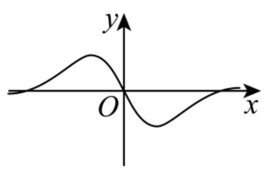
4. 苏格拉数学家科林. 麦克劳林 (*Colin Maclaurin*) 研究出了著名的 *Maclauin* 级数展开式,其中一个为 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots$,据此展开式,如图所示的程序框图的输出结果 S 约为 (　　)

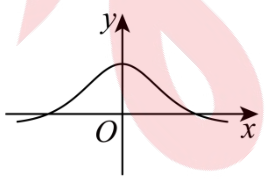
A. 2　　B. 1　　C. 0.5　　D. 0.25

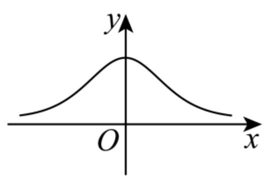


5. 函数 $f(x)=\dfrac{(2+\cos x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ 的部分图像大致为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的第二项为1,则“$a_{2020}<a_{2023}$”是“$a_{2022}<a_{2024}$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 一般来说,输出信号功率用高斯函数来描述,定义为 $I(x)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,其中 I_0 为输出信

号功率最大值(单位：mW)，x 为频率(单位：Hz)，μ 为输出信号功率的数学期望，σ^2 为输出信号的方差，3dB 带宽是光通信中一个常用的指标，是指当输出信号功率下降至最大值一半时，信号的频率范围，即对应函数图象的宽度。现已知输出信号功率为 $I(x)=I_0e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$(如图所示)，则其 3dB 带宽为（　　）

A. $\sqrt{\ln 2}$　　B. $4\sqrt{\ln 2}$　　C. $2\sqrt{2\ln 2}$　　D. $3\sqrt{\ln 2}$

8. 已知函数 $f(x)=3\sin\omega x+4\cos\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有两个零点 x_1、x_2，则 $f(x_1+x_2)$ 的值为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. -5　　D. 3

9. 已知双曲线 C:$3x^2-y^2=3m^2$ 的一条渐近线 l 与椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1(a>b>0)$ 交于 A，B 两点，若 $|F_1F_2|=|AB|$，(F_1,F_2 是椭圆的两个焦点)，则 E 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,0)$

10. 已知抛物线 $y^2=4x$，弦 AB 过其焦点，分别过弦的端点 A,B 的两条切线交于点 C，点 C 到直线 AB 距离的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 1

11. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $A=\frac{\pi}{10}$，$(\sqrt{3}-1)\sin C=\sqrt{2}\tan A\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)$，则（　　）

A. $c<b<\sqrt{2}c$　　B. $\sqrt{2}c<b<\sqrt{3}c$

C. $\sqrt{3}c<b<2c$　　D. $b>2c$

12. 已知函数 $f(x)=2^x+2^{-x}+\cos x+x^2$，若 $a=f(\sqrt{2})$，$b=f\left(-e^{\frac{1}{e}}\right)$，$c=f\left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)$，则（　　）

A. $c<b<a$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

13. 已知 x,y 满足线性约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x \\ y-2x+2\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$，若 $z=\frac{1}{2}x+y$，则 z 的最大值为______.

14. 若命题"$\exists x\in R$，$2^x-a=0$"为假命题，则实数 a 的取值范围为______.

15. 已知圆 C_1:$x^2+y^2=3$，圆 C_2:$(x-1)^2+(y-2)^2=3$，直线 l:$y=x+2$．若直线 l 与圆 C_1 交于 A,B 两点，与圆 C_2 交于 D,E 两点，M,N 分别为 AB,DE 的中点，则 $|MN|=$______.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 的面积为 2，若在棱 AD 上存在一点 M，使得 $\triangle MBC$ 为等边三角形，则四棱锥 $M-BCC_1B_1$ 外接球表面积的最小值为 ______.

17.（12 分）

2023 年 12 月 25 日，由科技日报社主办，部分两院院士和媒体人共同评选出的 2023 年国内十大科技新闻揭晓．某高校一学生社团随机调查了本校 100 名学生对这十大科技的了解情况，按照性别和了解情况分组，得到如下列联表：

	不太了解	比较了解	合计
男生	20	40	60
女生	20	20	40
合计	40	60	100

(1) 判断是否有 95% 的把握认为对这十大科技的了解存在性别差异；

(2) 若把这 100 名学生按照性别进行分层随机抽样，从中抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人，则这 2 人中至少有 1 人为女生的概率．

附：

① $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$；

② 当 $\chi^2>3.841$ 时有 95% 的把握认为两变量有关联．

18.（12 分）

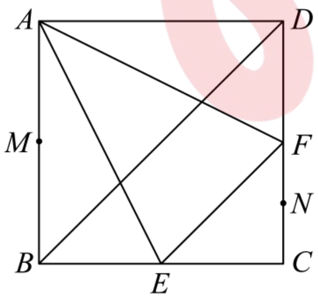
已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{3}{5}$，且满足 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$.

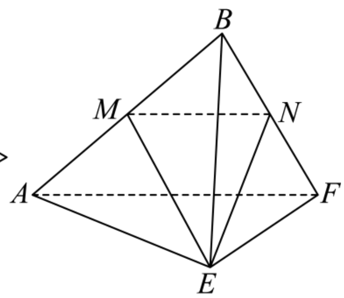
(1) 求证：数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列；

(2) 若 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2024$，求满足条件的最大整数 n.

19.（12 分）

在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC，CD 的中点，M、N 分别为 AB、CF 的中点，现沿 AE、AF、EF 折叠，使 B、C、D 三点重合，构成一个三棱锥 $B-AEF$，如图所示．





(1) 在三棱锥 $B-AEF$ 中，求证：$AB\perp EF$；

(2) 求四棱锥 $E-AMNF$ 的体积．

20.（12 分）

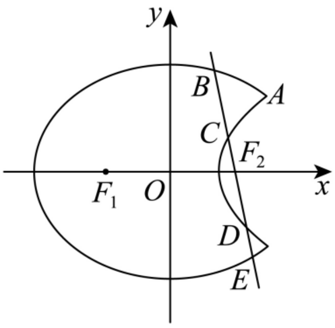
已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln\dfrac{x}{a}$.

(1) 若 $a=\mathrm{e}$，求 $f(x)$ 的极小值；

(2) 若对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 和 $a\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\geqslant ka$ 恒成立，求 k 的最大值.

21.（12 分）

如图，已知曲线 C_1 是以原点 O 为中心、F_1,F_2 为焦点的椭圆的一部分，曲线 C_2 是以原点 O 为中心，F_1,F_2 为焦点的双曲线的一部分，A 是曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点，且 $\angle AF_2F_1$ 为钝角，我们把曲线 C_1 和曲线 C_2 合成的曲线 C 称为“月蚀圆”．设 $A(2\sqrt{2},\sqrt{6})$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.



(1) 求曲线 C_1 和 C_2 所在的椭圆和双曲线的标准方程；

(2) 过点 F_2 作一条与 x 轴不垂直的直线，与“月蚀圆”依次交于 B,C,D,E 四点，记 G 为 CD 的中点，H 为 BE 的中点．问：$\dfrac{|CD|\cdot|HF_2|}{|BE|\cdot|GF_2|}$ 是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

22. [选修 4 － 4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\alpha+3\sin\alpha\\ y=\cos\alpha-\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

(1) 求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程；

(2) 若 A,B 为直线 l 上距离为 2 的两动点，点 P 为曲线 C 上的动点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

23. [选修 4 － 5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

已知 $f(x)=|x+1|+|2x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant 5-x$ 的解集；

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 M，若正数 a,b 满足 $a+b=2$，求证：$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\geqslant M$.