四川省成都市第七中学2023~2024学年高三下学期入学考试
理科数学试卷

学校：________ 姓名：________ 班级：________ 考号：________

一、单选题

1. 已知集合 $A=\{x\in Z|x^2-2x-15<0\}$，$B=\{x\in R|x-1\leqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_R B)$ 的真子集的个数为( )

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 若函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数，则 $f\left(\frac{b}{2}\right)=$( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. 2

3. 已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}=\frac{1}{1+i}$，则 $z+\bar{z}=$( )

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. 1　　D. -1

4. 已知 $(2x-1)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_6(x-1)^6$，则 $a_2=$( )

A. -60　　B. -30　　C. 30　　D. 60

5. 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4S_3=(a_3+1)^2$，$4S_4=(a_4+1)^2$. 则( )

A. $a_{10}=20$　　B. $S_5=50$　　C. $a_5+S_7=58$　　D. $\frac{a_n}{S_n}\geqslant 2$

6. 已知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{17}{25}$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 3

7. 对于数列 $\{a_n\}$，若满足：$nR_n=a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{3^2}a_3+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}a_n$，则称 R_n 为数列 $\{a_n\}$ 的“优值”，现已知数列 $\{a_n\}$ 的“优值” $R_n=\frac{1}{3^n}$，记数列 $\left\{a_n+\frac{8}{3}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_n 的最大值为( )

A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{23}{3}$　　C. $\frac{24}{3}$　　D. $\frac{25}{3}$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=2$，若圆 $D:(x-a)^2+(y-1)^2=2$ 上存在点 P，由点 P 向圆 C 引一条切线，切点为 M，且满足 $|PM|=\sqrt{2}|PO|$，则实数 a 的取值范围为( )

A. $[-\sqrt{7}-1,\sqrt{7}-1]$　　B. $[-4,2]$

C. $[-3,3]$　　D. $[-2,4]$

9. 设函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，$(\omega>0)$，若存在 $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3\omega}\right]$，且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=1$，则 ω 的取值范围是( )

A. $[4,+\infty)$　　B. $(4,6]$　　C. $[6,+\infty)$　　D. $(6,10]$

10. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=BC=1$，$CD=\sqrt{6}$，且 $\angle BAD=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，则该四面体的外接球表面积为( )

A. $\frac{7}{2}\pi$　　B. 7π　　C. 8π　　D. 10π

11. 从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数字中任意取出三个不同的数，若这三个数的和为不小于 9 的奇数，则不同的取法有( )种．

A. 54　　B. 53　　C. 47　　D. 46

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(-x)=xe^{x}+\frac{x}{e^{x}}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)+\frac{x-1}{e^{x}}>0$，若实数 a 满足 $f(2a)-f(a+2)-2ae^{-2a}+ae^{-a-2}+2e^{-a-2}\leqslant 0$，则 a 的取值范围为( )

A. $\left[-\frac{2}{3},2\right]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2]$

二、填空题

13. 若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线与直线 $x+2y-4=0$ 平行，则双曲线的右焦点到一条渐近线的距离为________.

14. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 $E\in$ 平面 ABB_1A_1，点 F 是线段 AA_1 的中点，若 $D_1E\perp CF$，则当 $\triangle EBC$ 的面积取得最小值时，$D_1E=$________.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数}\\ 2a_n, n\text{ 为偶数}\end{cases}(n\in N^*)$，令 $b_n=(\log_2 a_{2n})^2\cdot\sin\left(a_{2n-1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和为________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|+\frac{1}{x}, & x>0\\ -x^2-x+4, & x\leqslant 0\end{cases}$，$g(x)=-x+a$，若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，则 $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ 的取值范围是________.

三、解答题

17. 2023 年 12 月 25 日，由科技日报社主办，部分两院院士和媒体人共同评选出的 2023 年国内十大科技新闻揭晓．某高校一学生社团随机调查了本校 100 名学生对这十大科技的了解情况，按照性别和了解情况分组，得到如下列联表：

	不太了解	比较了解	合计
男生	20	40	60
女生	20	20	40
合计	40	60	100

(1) 判断是否有 95% 的把握认为对这十大科技的了解存在性别差异；

(2) 若把这 100 名学生按照性别进行分层随机抽样，从中抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取

2 人，记抽取的 2 人中女生数为 X，求 X 的分布列及 $E(X)$.

附：① $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$；

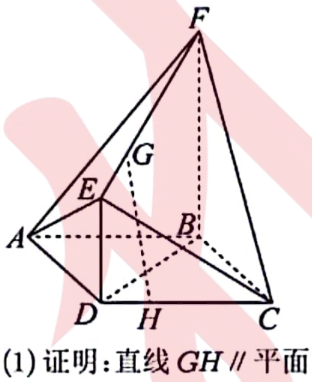
② 当 $\chi^2>3.841$ 时有 95% 的把握认为两变量有关联.

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sqrt{3}a-c}=\dfrac{\sin C}{a+b}$.

(1) 求 B 的值；

(2) 若 $b=2$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

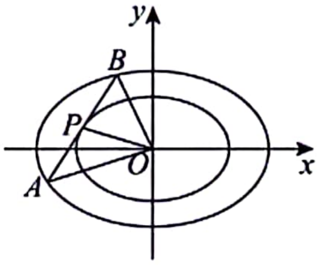
19. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $BD=\dfrac{1}{2}CD=1$，$BD\perp CD$.$DE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $DE=\dfrac{1}{2}BF=\sqrt{3}$，$DE\parallel BF$. 点 H,G 分别为线段 DC,EF 上的动点，满足 $DH=EG=\lambda(0<\lambda<2)$.



(1) 证明：直线 $GH\parallel$ 平面 BCF；

(2) 是否存在 λ，使得直线 GH 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$？请说明理由.

20. 设点 P 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上任意一点，过点 P 作椭圆的切线，与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{t^2}=1(t>1)$ 交于 A,B 两点．



(1) 求证：$|PA|=|PB|$；

(2) $\triangle OAB$ 的面积是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，请说明理由．

21. 设函数 $f(x)=(x-2)e^{ax}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-3x+b=0$，求 a,b 的值；

(2) 若当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)>-x-2$，求实数 a 的取值范围；

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，求证：$\frac{3}{1^2+2^2}+\frac{5}{2^2+3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}<\ln(n+1)$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\y=-1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta+\cos\theta)=3$.

(1) 写出曲线 C_1 的极坐标方程，曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 曲线 C_1 与曲线 C_2，如有公共点，求出公共点坐标；如无公共点，设 A,B 分别为曲线 C_1 与曲线 C_2 上的动点，求线段 $|AB|$ 的最小值.

23. 已知函数 $f(x)=|x^2-2x-3|$.

(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 5$ 的解集；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+|x+1|+2$ 的最小值为 m，若 $a>0,b>0$ 且 $2a+b=m$，求证：$4a^2+b^2\geqslant 2$.

参考答案：

1.C

【详解】由题意 $A=\{x\in Z|x^2-2x-15<0\}=\{x\in Z|(x+3)(x-5)<0\}$

$=\{x\in Z|-3<x<5\}=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，

$B=\{x\in R|x-1\leqslant 0\}=\{x|x\leqslant 1\}$，故 $\complement_R B=\{x|x>1\}$，

故 $A\cap(\complement_R B)=\{2,3,4\}$，则 $A\cap(\complement_R B)$ 的真子集的个数为 $2^3-1=7$，

故选：C

2.D

【详解】因为函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数，

所以 $-b+2b-2=0$ 且 $f(-x)=x^2-ax+1=x^2+ax+1=f(x)$，则 $\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$，

所以 $f(x)=x^2+1$，则 $f\left(\dfrac{b}{2}\right)=f(1)=1^2+1=2$.

故选：D.

3.C

【详解】由题意，复数 z 满足 $z-\mathrm{i}=\dfrac{1}{1+i}$，可得 $z=\dfrac{1}{1+i}+\mathrm{i}=\dfrac{1-i}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. 则 $z+\bar{z}=1$，

故选：C.

4.D

【详解】设 $t=x-1$，则 $x=t+1$，所以 $(2x-1)^6=(2t+1)^6=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_6t^6$.

$(2t+1)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r(2t)^{6-r}\times 1^r=C_6^r2^{6-r}t^{6-r}$，

取 $r=4$ 得 $a_2=C_6^4\times 2^2=60$.

故选：D.

5.C

【详解】设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $4S_3=(a_3+1)^2$，$4S_4=(a_4+1)^2$，

所以两式相减得 $4a_4=(a_4+1)^2-(a_3+1)^2$，可得 $4a_4=(a_4-a_3)(a_4+a_3+2)$，

即 $4(a_1+3d)=d(2a_1+5d+2)$，所以 $(d-2)(2a_1+5d)=0$，

因为 $\{a_n\}$ 是正项等差数列，则 $a_n>0,d\geqslant 0$，则 $2a_1+5d>0$，

所以 $d=2$，由 $4S_3=(a_3+1)^2$，得 $4(a_1+a_2+a_3)=(a_1+2d+1)^2$，

得 $4(3a_1+3d)=(a_1+2d+1)^2$，即 $4(3a_1+6)=(a_1+5)^2$，所以 $a_1=1$，

所以 $a_n=2n-1$，$S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，得 $a_{10}=19$，$S_5=25$，A，B 错误；

$a_5+S_7=9+49=58$，C 正确；

$\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{2n-1}{n^2}=-\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^2+1\leqslant 1$，$D$ 错误，

故选：C.

6.D

【详解】由已知可得 $\begin{cases}\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{17}{25}\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ 0<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，

所以，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，

故 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times1}=3$.

故选：D.

7. D

【详解】由已知得 $\dfrac{n}{3^n}=a_1+\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{1}{3^2}a_3+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-2}}a_{n-1}+\dfrac{1}{3^{n-1}}a_n$①，

则当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{n-1}{3^{n-1}}=a_1+\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{1}{3^2}a_3+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-2}}a_{n-1}$②

所以①－②得 $\dfrac{n}{3^n}-\dfrac{n-1}{3^{n-1}}=\dfrac{1}{3^{n-1}}a_n$，即 $a_n=\dfrac{n}{3}-(n-1)=-\dfrac{2}{3}n+1$，

又当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{3}=a_1$，符合 $a_n=-\dfrac{2}{3}n+1$，

故 $a_n=-\dfrac{2}{3}n+1$，

所以 $a_n+\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{11}{3}$

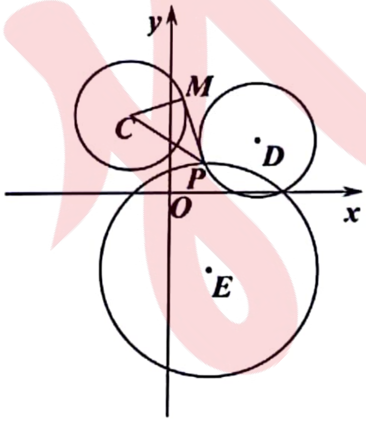
令 $a_n+\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{11}{3}>0$，得 $n\leqslant5$，

所以 S_n 的最大值为 $S_5=\dfrac{\left(3+\frac{1}{3}\right)\times5}{2}=\dfrac{25}{3}$.

故选：D.

8. D

【详解】设点 P 的坐标为 (x,y)，如图所示：



由 $|PM|=\sqrt{2}|PO|$ 可知：$|PM|^2=2|PO|^2$，而 $|PM|^2=|PC|^2-|CM|^2$，$\therefore|PC|^2-|CM|^2=2|PO|^2$

$\therefore(x+1)^2+(y-2)^2-2=2(x^2+y^2)$，整理得 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$，即 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$.

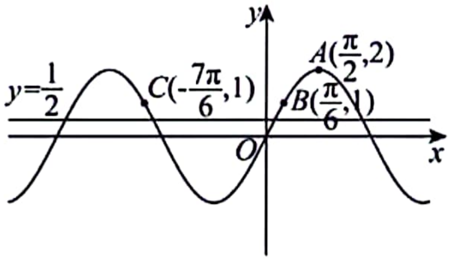
$\therefore$ 点 P 的轨迹为以点 $E(1,-2)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆，又 $\because$ 点 P 在圆 D 上，$\therefore$ 所以点 P 为圆 D 与圆 E 的交点，即要想满足题意，

只要让圆 D 和圆 E 有公共点即可，$\therefore$ 两圆的位置关系为外切，相交或内切，$\therefore \sqrt{2} \leqslant \sqrt{(a-1)^2+9} \leqslant 3\sqrt{2}$，解得 $-2 \leqslant a \leqslant 4$.

故选：D

9. A

【详解】



不妨取 $X=\omega x+\frac{\pi}{6}$，由 $x \in \left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3\omega}\right]$ 可得：$X=\omega x+\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，

由 $2\sin X=1$ 可得 $\sin X=\frac{1}{2}$，

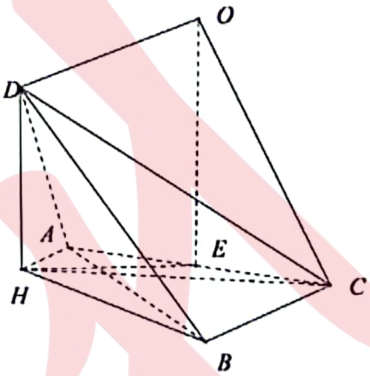
由图可取 $X_1=\frac{\pi}{6}, X_2=-\frac{7\pi}{6}$，要使存在 $x_1,x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3\omega}\right]$，且 $x_1 \neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=1$，

需使，$-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6} \leqslant -\frac{7\pi}{6}$，解得 $\omega \geqslant 4$.

故选：A.

10. B

【详解】



如图，作 $DH \perp$ 平面 ABC，连接 AH,HB,HC，易得 $DH \perp AB$，因 $AB \perp AD$，$AD \cap DH = D$，$AD,DH \subset$ 平面 DAH，

所以 $AB \perp$ 平面 DAH，$AH \subset$ 平面 DAH，故 $AB \perp AH$，

由题可得 $\angle BAC=30^\circ$，$AC=2$，则 $\angle HAC=120^\circ$.

不妨设 $AH=x, DH=h$，则有 $x^2+h^2=1$ ①，

在 $\triangle HAC$ 中，由余弦定理，$HC^2=x^2+4-2\times 2x\cos 120^\circ=x^2+2x+4$，在 $\triangle HDC$ 中，$h^2+x^2+2x+4=6$ ②，

将两式相减化简即得：$x=\frac{1}{2}$，$h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

取线段 AC 中点 E，过点 E 作 $OE \perp$ 平面 ABC，其中点 O 为外接球的球心，设外接球半径

为R，

由余弦定理求得$HE^2=\frac{1}{4}+1-2\times\frac{1}{2}\cos120^\circ=\frac{7}{4}$，

在直角梯形$HEOD$中，$OE^2=R^2-1$，由$R^2=\left(\sqrt{R^2-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$计算可得：$R^2=\frac{7}{4}$，

则该四面体的外接球表面积为7π.

故选：B.

11. B

【详解】根据题意，将10个数分为2组，

一组为奇数：1　3　5　7　9，一组为偶数0、2　4　6　8，

若取出的3个数和为奇数，分2种情况讨论：

①取出的3个数全部为奇数，有$C_5^2=10$种情况，都符合题意，

②取出的3个数有1个奇数，2个偶数，

若奇数取9，有$C_5^2=10$种情况；

若奇数取7，有$C_5^2=10$种情况；

若奇数取5，有$C_5^2-1=9$种情况；

若奇数取3，有$C_5^2-2=8$种情况；

若奇数取1，有$C_5^2-4=6$种情况；

综上，三个数的和为不小于9的奇数，不同的取法有$10+10+10+9+8+6=53$种．

故选：B.

12. C

【详解】由$f(x)-f(-x)=xe^x+\frac{x}{e^x}$，得$f(x)-\frac{x}{e^x}=f(-x)-\frac{-x}{e^{-x}}$.

令$g(x)=f(x)-\frac{x}{e^x}$，则$g(x)=g(-x)$，即$g(x)$为偶函数．

当$x<0$时，$g'(x)=f'(x)+\frac{x-1}{e^x}>0$，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增；

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减．

由$f(2a)-f(a+2)-2ae^{-2a}+ae^{-a-2}+2e^{-a-2}\leqslant0$，

得$f(2a)-\frac{2a}{e^{2a}}\leqslant f(a+2)-\frac{a+2}{e^{a+2}}$，即$g(2a)\leqslant g(a+2)$.

又$g(x)$为偶函数，所以$g(|2a|)\leqslant g(|a+2|)$，

因为$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$|2a|\geqslant|a+2|$，即$4a^2\geqslant a^2+4a+4$，解得$a\leqslant-\frac{2}{3}$，或$a\geqslant2$，

所以a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$.

故选：C.

13. $\frac{1}{2}$

【详解】根据题意可得$-b=-\frac{1}{2}$，故可得$b=\frac{1}{2}$，则$c=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

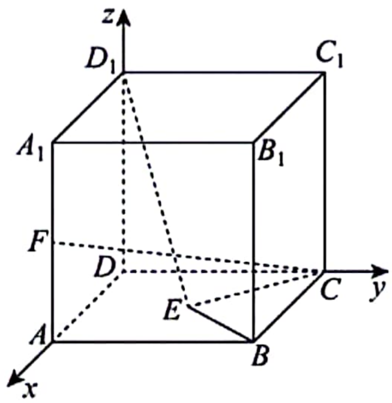
则右焦点坐标为$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$，一条渐近线为$y=\frac{1}{2}x$，

右焦点到一条渐近线的距离 $d=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\dfrac{1}{2}$.

14. $2\sqrt{2}/2^{\frac{3}{2}}$

【详解】以点 D 为坐标原点，以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$F(2,0,1)$，$D_1(0,0,2)$，设 $E(2,y,z)$，

则 $\overrightarrow{CF}=(2,-2,1)$，$\overrightarrow{D_1E}=(2,y,z-2)$，

因为 $D_1E\perp CF$，故 $\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{CF}=4-2y+z-2=0$，即 $z=2y-2$，

由于 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$EB\subset$ 平面 ABB_1A_1，故 $BC\perp EB$，

所以 $\triangle EBC$ 的面积为 $S=\dfrac{BE\cdot BC}{2}=\dfrac{BE\times 2}{2}=BE$，

而 $BE=\sqrt{(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(y-2)^2+(2y-2)^2}=\sqrt{5y^2-12y+8}$，

故 $S=\sqrt{5y^2-12y+8}$，当 $y=\dfrac{6}{5}$ 时，$5y^2-12y+8$ 取最小值，即 S 最小，

此时 $y=\dfrac{6}{5}$，$z=\dfrac{2}{5}$，则 $\overrightarrow{D_1E}=\left(2,\dfrac{6}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$，

故 $|\overrightarrow{D_1E}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{8}{5}\right)^2}=2\sqrt{2}$，即 $D_1E=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$

15. -5000

【详解】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数}\\2a_n, n\text{ 为偶数}\end{cases}(n\in N^*)$，

$\therefore$ 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，即 $a_{2n-1}=n$，

数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，即 $a_{2n}=2^n$，

因此 $b_n=(\log_2 2^n)^2\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}=n^2\sin\dfrac{n\pi}{2}$，显然 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 的周期为 4，

则 $b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}$

$=(4k-3)^2\sin\dfrac{(4k-3)\pi}{2}+(4k-2)^2\sin\dfrac{(4k-2)\pi}{2}+(4k-1)^2\sin\dfrac{(4k-1)\pi}{2}+$

$(4k)^2\sin\dfrac{4k\pi}{2}$

$=(4k-3)^2-(4k-1)^2=-8(2k-1)$，

令 $c_n=b_{4n-3}+b_{4n-2}+b_{4n-1}+b_{4n}$，则有 $c_n=-8(2n-1)$，

$\because c_{n+1}-c_n=-8[2(n+1)-1]-[-8(2n-1)]=-16$，$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列，

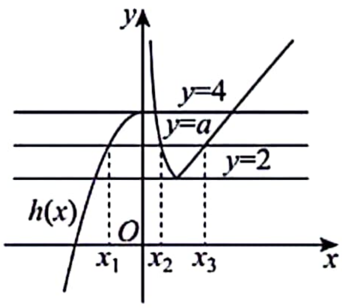
数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和，即数列 $\{c_n\}$ 的前 25 项和 $\frac{25\times[(-8)+8(1-2\times25)]}{2}=-5000$.

故答案为：-5000.

16. $(-\sqrt{2},0]$

【详解】由题意设 $h(x)=f(x)+x$，则函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点即为方程 $h(x)=a$ 的根，

在同一平面直角坐标系中分别画出函数 $h(x)$ 的图象以及直线 $y=a$ 如图所示：



若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，(不妨设为 $x_1<x_2<x_3$)，

则方程 $h(x)=a$ 的根有三个根 x_1,x_2,x_3，且 $x_1\leqslant 0<x_2<1<x_3$，

所以 $a\in(2,4]$，

且 $2<a=-x_1^2+4=-\ln x_2+x_2+\frac{1}{x_2}=\ln\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{\frac{1}{x_2}}=\ln x_3+x_3+\frac{1}{x_3}\leqslant 4$，

因为 $y=\ln x+x+\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $x_3=\frac{1}{x_2}$，即 $x_2x_3=1$，

所以 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=x_1$，

令 $2=a=-x^2+4$，$x\leqslant 0$，解得 $x=-\sqrt{2}$，令 $4=a=-x^2+4$，$x\leqslant 0$，解得 $x=0$，

所以 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=x_1\in(-\sqrt{2},0]$.

故答案为：$(-\sqrt{2},0]$.

17. (1) 没有

(2) 分布列见解析，$E(X)=\frac{4}{5}$

【详解】(1) 根据列联表中的数据，

得 $\chi^2=\frac{100\times(20\times20-20\times40)^2}{40\times60\times40\times60}=\frac{25}{9}\approx 2.778<3.841$，

所以没有 95% 的把握认为对这十大科技的了解存在性别差异 .

(2) 这 100 名学生中男生 60 人，女生 40 人，按照性别进行分层随机抽样，从中抽取 5 人，则抽取的男生有 3 人，女生在 2 人，

所以 X 的取值依次为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$.

18. (1) $B=\frac{\pi}{6}$

(2) $S\in(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$

【详解】(1) $\frac{\sin A-\sin B}{\sqrt{3}a-c}=\frac{\sin C}{a+b}$，由正弦定理得 $\frac{a-b}{\sqrt{3}a-c}=\frac{c}{a+b}$，即 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$b=2,B=\frac{\pi}{6}$，记 $\triangle ABC$ 的面积为 S.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{c}{\sin C}$，即 $a=4\sin A,c=4\sin C$.

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=4\sin A\sin C=2[\cos(A-C)-\cos(A+C)]=2\cos\left(2A-\frac{5\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

因为在锐角 $\triangle ABC$ 中，$B=\frac{\pi}{6}$，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),C=\pi-\frac{\pi}{6}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

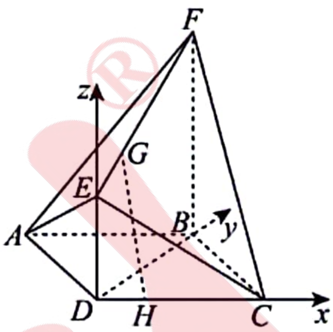
解得 $A\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),2A-\frac{5\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，

则 $\cos\left(2A-\frac{5\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，故 $S\in(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

19. (1) 证明见解析

(2) 存在，理由见解析

【详解】(1) 如图，以 D 为原点，分别以 DC,DB,DE 方向为 x,y,z 轴建立坐标系.



$C(2,0,0),B(0,1,0),A(-2,1,0),E(0,0,\sqrt{3}),F(0,1,2\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{BC}=(2,-1,0),\overrightarrow{BF}=(0,0,2\sqrt{3}),\overrightarrow{AE}=(2,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{EF}=(0,1,\sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则由 $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n_1}=0,\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n_1}=0,\begin{cases}2x_1-y_1=0\\2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=1$ 得 $\vec{n_1}=(1,2,0)$.

因为 $DC=EF=2,EG=DH=\lambda$，所以 $\overrightarrow{DH}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{DC},\overrightarrow{EG}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{EF}$

解得 $H(\lambda,0,0),G\left(0,\frac{\lambda}{2},\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right),\overrightarrow{GH}=\left(\lambda,-\frac{\lambda}{2},-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$.

所以 $\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{GH}=0$，且 $GH\not\subset$ 平面 BCF，所以 $GH\parallel$ 平面 BCF

(2) 设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

则由 $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n_2}=0,\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n_2}=0,\begin{cases}2x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0\\y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，解得 $\vec{n_2}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$.

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n_2},\overrightarrow{GH}\rangle|=\left|\frac{\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2\lambda^2+3\lambda+3}}\right|=\frac{\sqrt{42}}{14}$，

解得 $\lambda=1$.

20. (1) 见解析

(2) 是定值，定值为 $2\sqrt{t^2-1}$

【详解】(1) 设直线 AB 斜率不存在，则点 P 在 x 轴上，由对称性可知，$|PA|=|PB|$，

若直线 AB 的斜率存在，设 $AB: y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=\lambda(\lambda>0) \end{cases}$，可得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4\lambda=0$，

当 $\lambda=1$ 时，直线 AB 与椭圆切于点 P，$\Delta=64k^2m^2-16(4k^2+1)(m^2-1)=0$，

解得：$m^2=4k^2+1$，$x_0=\dfrac{-4km}{4k^2+1}$，

当 $\lambda=t^2$ 时，线段 AB 中点的横坐标 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-4km}{4k^2+1}=x_0$，

所以点 P 为线段 AB 的中点，$|PA|=|PB|$，

综上，$|PA|=|PB|$；

(2) 若直线 AB 斜率不存在，则 $AB: x=\pm2$，与椭圆 C_2 方程联立可得，$A(\pm2,-\sqrt{t^2-1})$，$B(\pm2,\sqrt{t^2-1})$，故 $S_{\triangle OAB}=2\sqrt{t^2-1}$，

若直线 AB 的斜率存在，由 (1) 可得

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4t^2}{4k^2+1}$，$m^2=4k^2+1$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{4k^2+1}}$，

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{4k^2+1}}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{t^2-1}$，

综上 $\triangle OAB$ 的面积为定值 $2\sqrt{t^2-1}$.

21. (1) $a=-1, b=2$

(2) $(-\infty,1]$

(3) 证明见解析

【详解】(1) 因为 $f(x)=(x-2)e^{ax}$，则 $f'(x)=e^{ax}+a(x-2)e^{ax}$，

则 $f(0)=-2$，$f'(0)=1-2a$，即切点坐标为 $(0,-2)$，斜率 $k=1-2a$，

由题意可得：$\begin{cases} -2-3\times0+b=0 \\ 1-2a=3 \end{cases}$，解得 $a=-1, b=2$.

(2) 令 $g(x)=f(x)+x+2=(x-2)e^{ax}+x+2$，

则 $g'(x)=e^{ax}+a(x-2)e^{ax}+1=(ax-2a+1)e^{ax}+1$，

由题意可知：当 $x>0$ 时，恒有 $g(x)>0$，且 $g(0)=0$，

则 $g'(0)=1-2a+1\geqslant0$，解得 $a\leqslant1$，

若 $a\leqslant1$，则有：

①当 $a<0$ 时，$g(x)=(x-2)e^{ax}+x+2=(x+2)e^{ax}\left(\dfrac{x-2}{x+2}+e^{-ax}\right)=$

$(x+2)e^{ax}\left(1-\dfrac{4}{x+2}+e^{-ax}\right)$，

因为 $x>0$，可知 $(x+2)e^{ax}>0$，

令$h(x)=1-\frac{4}{x+2}+e^{-ax}$，

因为$y=1-\frac{4}{x+2}$,$y=e^{-ax}$在$(0,+\infty)$内单调递增，可得$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，

则$h(x)>h(0)=0$，即$g(x)=(x+2)e^{ax}h(x)>0$，符合题意；

②当$a=0$时，则$g(x)=x-2+x+2=2x>0$在$(0,+\infty)$内恒成立，符合题意；

③当$0<a\leqslant 1$时，令$\varphi(x)=g'(x)$，

则$\varphi'(x)=ae^{ax}+a(ax-2a+1)e^{ax}=a(ax-2a+2)e^{ax}$，

因为$x>0$，则$ax-2a+2>-2a+2\geqslant 0$，$e^{ax}>0$，

可知$\varphi'(x)=a(ax-2a+2)e^{ax}>0$在$(0,+\infty)$内恒成立，

则$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，可得$\varphi(x)>\varphi(0)=2-2a\geqslant 0$，

则$g(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，可得$g(x)>\varphi(0)=0$，符合题意；

综上所述：实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

(3) 由(2)可知：当$a\leqslant 1$,$x>0$时，$(x-2)e^{ax}+x+2>0$，

令$a=1$，可得$(x-2)e^{x}+x+2>0$，

令$t=e^{\frac{1}{2}x}>1$，则$t^2=e^{x}$,$x=2\ln t$，则$(2\ln t-2)t^2+2\ln t+2>0$，整理得$\frac{t^2-1}{1+t^2}<\ln t$，

令$t=\frac{n+1}{n}>1$,$n\in N^{*}$，则$\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1}{1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}<\ln\frac{n+1}{n}$，整理得$\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}<\ln(n+1)-\ln n$，

则$\frac{3}{1^2+2^2}<\ln 2-\ln 1$,$\frac{5}{2^2+3^2}<\ln 3-\ln 2$,$\cdots$,$\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}<\ln(n+1)-\ln n$，

所以$\frac{3}{1^2+2^2}+\frac{5}{2^2+3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}<\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$.

22. (1) 曲线C_1极坐标方程$\rho^2-2\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$，曲线$C_2$的直角坐标方程为$x+y-3=0$

(2) 无公共点，$\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

【详解】(1) 曲线C_1的普通方程$(x-1)^2+(y+1)^2=1$，

极坐标方程$(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta+1)^2=1$，$\therefore \rho^2-2\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$，

曲线C_2的极坐标方程为$\rho(\sin\theta+\cos\theta)=3$. 化为直角坐标方程为$x+y-3=0$；

(2) 曲线C_1的普通方程$(x-1)^2+(y+1)^2=1$，圆心为$O_1(1,-1)$，

到直线$x+y-3=0$的距离为$d=\frac{|1-1+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$，故曲线$C_1$与曲线$C_2$的无公共点，

即直线与圆相离，得线段$|AB|$的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$.

23. (1)$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

(2) 证明见解析

【详解】(1) 不等式$f(x)\geqslant 5$可化为$x^2-2x-3\geqslant 5$或$x^2-2x-3\leqslant -5$，

由$x^2-2x-3\geqslant 5$，可得$x^2-2x-8\geqslant 0$，解得$x\geqslant 4$或$x\leqslant -2$；

由$x^2-2x-3\leqslant -5$，可得$x^2-2x+2\leqslant 0$，解得$x\in\varnothing$，

所以不等式$f(x)\geqslant 5$的解集为$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.

(2) 由题意，知$g(x)=f(x)+|x+1|+2=|(x-3)(x+1)|+|x+1|+2$，

当 $x\leqslant -1$ 时，$g(x)=(x-3)(x+1)-(x+1)+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$，

因 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，则 $g(x)_{\min}=g(-1)=2$；

当 $-1<x<3$ 时，$g(x)=-(x-3)(x+1)+(x+1)+2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4}$，

因 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{2},3\right)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $(-1,3)$ 无最小值，但是 $g(x)>2$；

当 $x\geqslant 3$ 时，$g(x)=(x-3)(x+1)+(x+1)+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

因 $g(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)_{\min}=g(3)=6$.

综上，当 $x=-1$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值 2，即 $m=2$，所以 $2a+b=2$，

因 $a>0,b>0$，所以 $4a^2+b^2=(2a)^2+b^2\geqslant\frac{(2a+b)^2}{2}=2$，当且仅当 $a=\frac{1}{2},b=1$ 时等号成立，

故 $4a^2+b^2\geqslant 2$.