成都七中 2023—2024 学年度下期高 2024 届入学考试

理科数学试卷

考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathrm{Z} \mid x^2-2x-15<0\}$，$B=\{x\in \mathrm{R} \mid x-1\le 0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathrm{R}}B)$ 的真子集的个数为（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 若函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数，则 $f\left(\dfrac{b}{2}\right)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $\dfrac{7}{4}$　　D. 2

3 已知复数 z 满足 $z-\mathrm{i}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. 1　　D. -1

4. 已知 $(2x-1)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_6(x-1)^6$，则 $a_2=$（　　）

A. -60　　B. -30　　C. 30　　D. 60

5. 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4S_3=(a_3+1)^2$，$4S_4=(a_4+1)^2$．则（　　）

A　$a_{10}=20$　　B. $S_5=50$

C. $a_5+S_7=58$　　D. $\dfrac{a_n}{S_n}\ge 2$

6. 已知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{17}{25}$，则 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 3

7. 对于数列 $\{a_n\}$，若满足：$nR_n=a_1+\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{1}{3^2}a_3+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}a_n$，则称 R_n 为数列 $\{a_n\}$ 的“优值”，现已知数列 $\{a_n\}$ 的“优值” $R_n=\dfrac{1}{3^n}$，记数列 $\left\{a_n+\dfrac{8}{3}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_n 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{22}{3}$　　B. $\dfrac{23}{3}$　　C. $\dfrac{24}{3}$　　D. $\dfrac{25}{3}$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=2$，若圆 $D:(x-a)^2+(y-1)^2=2$ 上存在点 P，由点 P 向圆 C 引一条切线，切点为 M，且满足 $|PM|=\sqrt{2}|PO|$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[-\sqrt{7}-1,\sqrt{7}-1]$　　B. $[-4,2]$　　C. $[-3,3]$　　D. $[-2,4]$

9. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}),(\omega>0)$，若存在 $x_1,x_2\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3\omega}]$，且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=1$，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $[4,+\infty)$　　B. $(4,6]$

C. $[6,+\infty)$　　D. $(6,10]$

10. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=BC=1$，$CD=\sqrt{6}$，且 $\angle BAD=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，则该四面体的外接球表面积为（　　）

A. $\frac{7}{2}\pi$　　B. 7π　　C. 8π　　D. 10π

11. 从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数字中任意取出三个不同的数，若这三个数的和为不小于 9 的奇数，则不同的取法有（　　）种.

A. 54　　B. 53　　C. 47　　D. 46

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(-x)=xe^x+\frac{x}{e^x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)+\frac{x-1}{e^x}>0$，若实数 a 满足 $f(2a)-f(a+2)-2ae^{-2a}+ae^{-a-2}+2e^{-a-2}\leq 0$，则 a 的取值范围为（　　）

A. $\left[-\frac{2}{3},2\right]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 一条渐近线与直线 $x+2y-4=0$ 平行，则双曲线的右焦点到一条渐近线的距离为_________.

14. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 $E\in$ 平面 ABB_1A_1，点 F 是线段 AA_1 的中点，若 $D_1E\perp CF$，则当□EBC 的面积取得最小值时，$D_1E=$____________.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}(n\in N^*)$，令 $b_n=(\log_2 a_{2n})^2\cdot\sin\left(a_{2n-1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

则数列$\{b_n\}$的前 100 项和为__________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}|\ln x|+\dfrac{1}{x},x>0\\-x^2-x+4,x\le 0\end{cases}$，$g(x)=-x+a$，若函数$F(x)=f(x)-g(x)$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，则$x_1\cdot x_2\cdot x_3$的取值范围是__________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 2023 年 12 月 25 日，由科技日报社主办，部分两院院士和媒体人共同评选出的 2023 年国内十大科技新闻揭晓.某高校一学生社团随机调查了本校 100 名学生对这十大科技的了解情况，按照性别和了解情况分组，得到如下列联表：

	不太了解	比较了解	合计
男生	20	40	60
女生	20	20	40
合计	40	60	100

（1）判断是否有 95%的把握认为对这十大科技的了解存在性别差异；

（2）若把这 100 名学生按照性别进行分层随机抽样，从中抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人，记抽取的 2 人中女生数为X，求X的分布列及$E(X)$.

附：①$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$；

②当$\chi^2>3.841$时有 95%的把握认为两变量有关联.

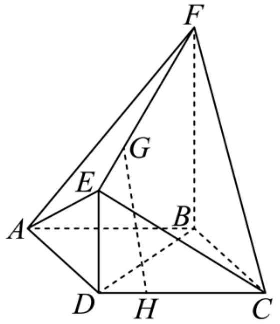
18. 在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c，已知$\dfrac{\sin A-\sin B}{\sqrt{3}a-c}=\dfrac{\sin C}{a+b}$.

（1）求B的值；

（2）若$b=2$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

19. 如图，在多面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$为平行四边形，且$BD=\dfrac{1}{2}CD=1, BD\perp CD.DE\perp$平

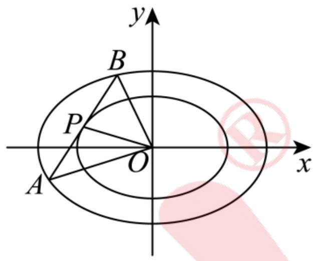
面 $ABCD$，且 $DE=\frac{1}{2}BF=\sqrt{3}, DE \parallel BF$.点 H,G 分别为线段 DC,EF 上的动点，满足 $DH=EG=\lambda(0<\lambda<2)$.



（1）证明：直线 $GH \parallel$ 平面 BCF ；

（2）是否存在 λ ，使得直线 GH 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$ ？请说明理由.

20. 设点 P 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上任意一点，过点 P 作椭圆的切线，与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{t^2}=1\left(t>1\right)$ 交于 A，B 两点.



（1）求证：$|PA|=|PB|$；

（2）$\triangle OAB$ 的面积是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，请说明理由.

21. 设函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\mathrm{e}^{ax}$.

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-3x+b=0$ ，求 a，b 的值；

（2）若当 $x>0$ 时，恒有 $f\left(x\right)>-x-2$ ，求实数 a 取值范围；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，求证：$\frac{3}{1^2+2^2}+\frac{5}{2^2+3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+\left(n+1\right)^2}<\ln\left(n+1\right)$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中选一题作答．如果多选，则按所做的第一题记分．

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=-1+\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\left(\sin\theta+\cos\theta\right)=3$.

（1）写出曲线 C_1 的极坐标方程，曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）曲线 C_1 与曲线 C_2，如有公共点，求出公共点坐标；如无公共点，设 A, B 分别为曲线 C_1 与曲线 C_2 上的动点，求线段 $|AB|$ 的最小值.

【选修 4-5：不等式选讲】

23. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|x^2-2x-3\right|$.

（1）求不等式 $f\left(x\right)\geq 5$ 的解集；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\left|x+1\right|+2$ 最小值为 m，若 $a>0, b>0$ 且 $2a+b=m$，求证：$4a^2+b^2\geq 2$