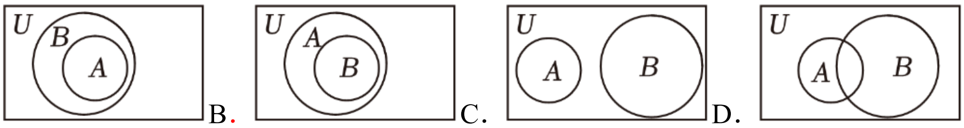
成都石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届入学考试理科答案

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1．已知全集$U=R$，能表示集合$A=\{x\in N\mid x^2-3x\leqslant 0\}$与$B=\{1，2\}$关系的$Venn$图是(　　)

A．　B．　C．　D．



【解答】解：全集$U=R$，集合$A=\{x\in N\mid x^2-3x\leqslant 0\}=\{x\in N\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0，1，2,3\}$，$B=\{1，2\}$，

$\therefore B\subsetneqq A$，$\therefore$能表示集合$A=\{x\in N\mid x^2-3x\leqslant 0\}$，$B=\{1，2\}$关系的$Venn$图是$B$．

故选：B．

2.已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(3,2)$，则$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}-\vec{b}$方向上投影为(　　)

A．4　　B．-2　　C．2　　D．-4

解：由$\vec{a}+\vec{b}=(2,4)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-4,0)$，

则$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}-\vec{b}$方向上的投影向量为：

$\dfrac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{-8}{4}=-2$．故选：$B$．

3．$5G$技术在我国已经进入高速发展的阶段，$5G$手机的销量也逐渐上升，某手机商城统计了最近 5 个月手机的实际销量，如表所示：

时间x	1	2	3	4	5
销售量y（千只）	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若y与x线性相关，且线性回归方程为$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$，则下列说法不正确的是(　　)

A．由题中数据可知，变量y与x正相关，且相关系数$r<1$

B．线性回归方程$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$中$\hat{a}=0.26$

C．残差$\hat{e}_i(i=1,2,3,4,5)$的最大值与最小值之和为 0

D．可以预测$x=6$时该商场$5G$手机销量约为 1.72（千只）

【解答】解：从数据看y随x的增加而增加，故变量y与x正相关，由于各增量并不相等，故相关系数$r<1$，故A正确；

由已知数据易得$\bar{x}=3,\bar{y}=1$，代入$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$中得到$\hat{a}=1-3\times0.24=1-0.72=0.28$，故$B$错误；

$\hat{y}=0.24x+0.28$，$\hat{y}_1=0.24+0.28=0.52$，$\hat{y}_2=0.24\times 2+0.28=0.76$，

$\hat{y}_3=0.24\times 3+0.28=1.00$，$\hat{y}_4=0.24\times 4+0.28=1.24$，$\hat{y}_5=0.24\times 5+0.28=1.48$，

$\hat{e}_1=0.5-0.52=-0.02$，$\hat{e}_2=0.8-0.76=0.04$，$\hat{e}_3=1-1=0$，$\hat{e}_4=1.2-1.24=-0.04$，$\hat{e}_5=1.5-1.48=0.02$，

残差 $\hat{e}_i(i=1,2,3,4,5)$ 的最大值 $\hat{e}_2=0.04$ 与最小值 $\hat{e}_4=-0.04$ 之和为 0，故 C 正确；

$x=6$ 时该商场 $5G$ 手机销量约为 $\hat{y}=0.24\times 6+0.28=1.72$，故 D 正确．

故选：B．

4．方程 $\dfrac{x^2}{m+3}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$ 表示双曲线的必要不充分条件可以是(　　)

A．$m\in(-3,1)$　B．$m\in(-3,\ -1)\cup(-1,\ 1)$　C．$m\in(-3,+\infty)$　D．$m\in(-3,-1)$

【解答】解：若方程 $\dfrac{x^2}{m+3}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$ 表示双曲线，

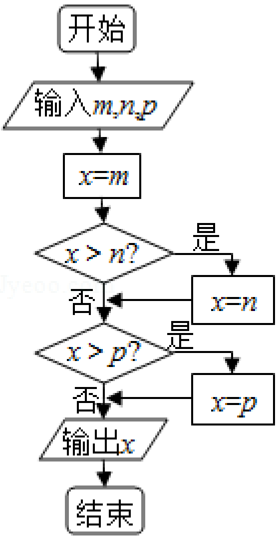
则 $(m+3)(m-1)<0$，解得：$-3<m<1$，

则：方程 $\dfrac{x^2}{m+3}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$ 表示双曲线的必要不充分条件所对应的集合必须真包含 $\{m|:-3<m<1$，

选项故选：C．

5．执行如图所示的程序框图，若依次输入 $m=\dfrac{\ln 2}{2}$，$n=\dfrac{\ln 3}{3}$，$p=\dfrac{\ln 5}{5}$，则输出的结果为(　　)

A．$\dfrac{\ln 2}{2}$　B．$\dfrac{\ln 3}{3}$　C．$\dfrac{\ln 5}{5}$　D．以上都不对



【解答】解：根据题意，该流程图的作用是求出 m、n、p 中的最小数，

：$2^5>5^2\Leftrightarrow ln2^5>ln5^2\Leftrightarrow 5ln2>2ln5\Leftrightarrow\dfrac{ln2}{2}>\dfrac{ln5}{5}$．

$3^2>2^3\Leftrightarrow ln3^2>ln2^3\Leftrightarrow 2ln3>3ln2\Leftrightarrow\dfrac{ln3}{3}>\dfrac{ln2}{2}$，

$\therefore c<a<b$．故选：C．

6．在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A．$\sqrt{3}$　B．$-\sqrt{3}$　C．2　D．-2

【解答】解：$\because\Delta ABC$ 的面积 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，可得：$ac\sin B=2\sqrt{3}$，

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\dfrac{1}{2}ac\sin B$　　$\therefore\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$　　$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$　　$ac=4$

又 $\because\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos(\pi-B)=-2$ 故选：D．

7．设等差数列的前 n 项和为 S_n，已知 $S_6=36$，$S_{n-6}=144$，$S_n=324$，则 n 的值为(　　)

A．15　　B．16　　C．17　　D．18

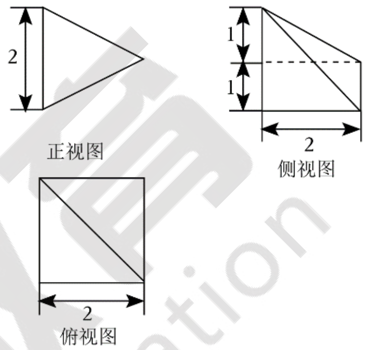
【解答】解：因为等差数列中，$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$，$S_{n-6}=144$，$S_n=324$，

则 $S_n-S_{n-6}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+a_{n-5}=180$，

两式相加得，$6(a_1+a_n)=216$，即 $a_1+a_n=36$，

因为 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=18n=324$，所以 $n=18$．故选：D．

8．如图是某四棱锥的三视图，则该四棱锥的高为(　　)



A．1　　B．2　　C．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

【解答】解：由题意几何体是四棱锥 $P-ABCD$，过 P 作 $PE\perp AD$ 于 E，

在正方体中有 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $CD\perp PE$，

又因为 $AD\bigcap CD=D$，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，

所以四棱锥的高为 PE，

在 ΔPAD 中，$PA=2$，$PD=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{5}$，

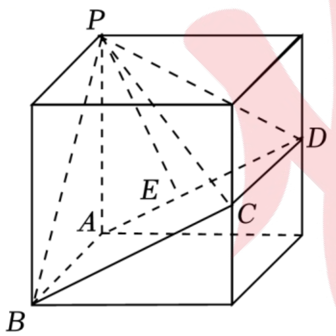
故 $\cos\angle ADP=\dfrac{AD^2+PD^2-AP^2}{2AD\cdot PD}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore\sin\angle ADP=\sqrt{1-cos^2\angle ADP}=\dfrac{4}{5}$，

故 $S_{\Delta ADP}=\dfrac{1}{2}PE\times\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\dfrac{4}{5}$，解得 $PE=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$．

所以该四棱锥的高为：$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$．

故选：D．



9．抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l，A，B 是抛物线上的两个动点，且满足 $AF\perp BF$，P 为线段 AB 的中点，设 P 在 l 上的射影为 Q，则 $\dfrac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：设$|AF|=a$，$|BF|=b$，A，B在l上的射影分别为M，N，则$|AF|=|AM|$，$|BF|=|BN|$，

故$|PQ|=\dfrac{|AM|+|BN|}{2}=\dfrac{a+b}{2}$.

又$AF\perp BF$，所以$|AB|=\sqrt{|AF|^2+|BF|^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，

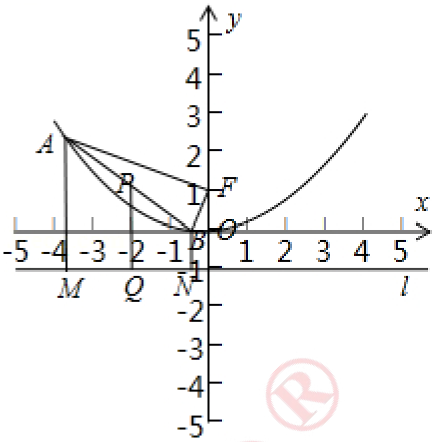
因为$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab..(a+b)^2-\dfrac{(a+b)^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2}{2}$，

所以$\sqrt{a^2+b^2}..\dfrac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$，

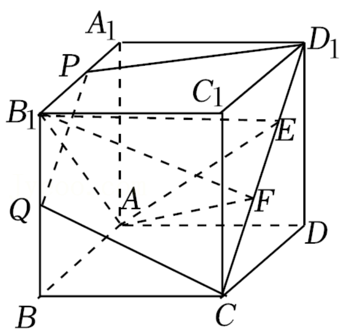
当且仅当$a=b$时等号成立，

故$\dfrac{|PQ|}{|AB|}=\dfrac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}},,\dfrac{a+b}{2\times\dfrac{\sqrt{2}(a+b)}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.



10．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，线段CD_1上有两个动点E，F，且$EF=\dfrac{1}{2}$，点P，Q分别为A_1B_1，BB_1的中点，G在侧面CDD_1C_1上运动，且满足$B_1G//$平面CD_1PQ，以下命题错误的是(　　)



A．$AB_1\perp EF$

B．多面体$AEFB_1$的体积为定值

C．侧面CDD_1C_1上存在点G，使得$B_1G\perp CD_1$

D．直线B_1G与直线BC所成的角可能为$\dfrac{\pi}{6}$

解：对于A，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB_1\perp A_1B$，$A_1B//CD_1$，E、F是线段CD_1上有两个动点，$\therefore AB_1\perp EF$，故A正确；

对于B，$\because EF=\dfrac{1}{2}$，B_1到EF的距离为定值，$\therefore S_{\square B_1EF}$是定值，

$\because$点A到平面B_1EF的距离为定值，$\therefore$多面体$AEFB_1$的体积为定值，故B正确；

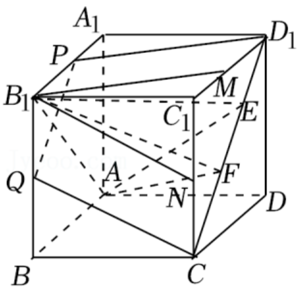
对于 C，$\because B_1C=B_1D_1$，$\therefore$ 当 G 为 CD_1 中点时，$B_1G\perp CD_1$，故 C 正确；

对于 D，取 C_1D_1 中点 M，CC_1 中点 N，当 G 与 M 或 N 重合时，

直线 B_1G 与直线 BC 所成的角 $\angle MB_1C_1$ 最大，

$\tan\angle MB_1C_1=\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\tan\dfrac{\pi}{6}$，故 D 错误.

故选：D.



11．已知直线 $l_1:x+y-4=0$ 与圆心为 $M(0,1)$ 且半径为 3 的圆相交于 A，B 两点，直线 $l_2:2mx+2y-3m-5=0$ 与圆 M 交于 C，D 两点，则四边形 $ACBD$ 的面积的值最大是(　　)

A．$9\sqrt{3}$　　B．$9\sqrt{2}$　　C．$6\sqrt{2}$　　D．$9(\sqrt{2}+1)$

【解答】解：根据题意，圆 M 的圆心为 $M(0,1)$ 且半径为 3，则圆 M 的方程为 $x^2+(y-1)^2=9$，即 $x^2+y^2-2y-8=0$，

直线 $l_1:x+y-4=0$ 与圆 M 相交于 A，B 两点，

则有 $\begin{cases}x^2+y^2-2y-8=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解可得：$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$，即 A、B 的坐标为 $(3,1)$，$(0,4)$，

则 $|AB|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，且 AB 的中点为 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$，

直线 $l_2:2mx+2y-3m-5=0$，变形可得 $m(2x-3)+2y-5=0$，直线 l_2 恒过定点 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$，

设 $N(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$，

当 CD 与 AB 垂直时，四边形 $ACBD$ 的面积最大，

此时 CD 的方程为 $y-\dfrac{5}{2}=x-\dfrac{3}{2}$，变形可得 $y=x+1$，经过点 $M(0,1)$，

则此时 $|CD|=6$，

故 $S_{四边形ACBD}$ 的最大值 $=S_{\Delta ACB}+S_{\Delta ADB}=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$，

故 $S_{四边形ACBD}\leqslant 9\sqrt{2}$，故选：$B$.

12．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有 4 个极值点，给出下列四个结论：

①$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上有且仅有 3 个不同的零点；②$f\left(x\right)$ 的最小正周期可能是 $\dfrac{\pi}{2}$；

③ω 的取值范围是 $\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{17}{4}\right]$；④$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{23},\dfrac{\pi}{19}\right)$ 上单调递增.

其中正确结论的个数为（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

12．C【分析】令 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，则 $x=\dfrac{\pi+4k\pi}{4\omega}$，$k\in Z$，结合条件可得 $0<\dfrac{\pi+4k\pi}{4\omega}<\pi$ 有 4 个整数 k 符合题意，可求出 ω 的取值范围，再利用三角函数图象性质逐项分析即可得出结论.

【详解】由函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，

令 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$ 可得 $x=\dfrac{\pi+4k\pi}{4\omega}$，$k\in Z$，

因为 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 个极值点，即可得 $0<\dfrac{\pi+4k\pi}{4\omega}<\pi$ 有且仅有 4 个整数 k 符合题意，

解得 $0<\dfrac{1+4k}{4\omega}<1$，即 $0<1+4k<4\omega$，可得 $k=0,1,2,3$，

即 $1+4\times3<4\omega\leq1+4\times4$，解得 $\omega\in\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{17}{4}\right]$，即③正确；

对于①，当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$\omega x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$，即可得 $\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]$，

显然当 $\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{7\pi}{2},4\pi\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上有且仅有 3 个不同的零点；

当 $\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\in\left(4\pi,\dfrac{9\pi}{2}\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上有且仅有 4 个不同的零点；即①错误；

对于②，$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}\in\left[\dfrac{8\pi}{17},\dfrac{8\pi}{13}\right)$，易知 $\dfrac{\pi}{2}\in\left[\dfrac{8\pi}{17},\dfrac{8\pi}{13}\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期可能是 $\dfrac{\pi}{2}$，即②正确；

对于④，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{23},\dfrac{\pi}{19}\right)$ 时，$\omega x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\omega\dfrac{\pi}{23}+\dfrac{\pi}{4},\omega\dfrac{\pi}{19}+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

由 $\omega\in\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{17}{4}\right]$ 可知 $\left(\omega\dfrac{\pi}{23}+\dfrac{\pi}{4},\omega\dfrac{\pi}{19}+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(\dfrac{9\pi}{23},\dfrac{9\pi}{19}\right)$，

由三角函数图象性质可知 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{23},\dfrac{\pi}{19}\right)$ 上单调递增，即④正确；

即可得②③④正确.故选：C

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．若 $\left(2-i\right)\cdot z=3i$，则 z 的共轭复数为________

【详解】依题意，$z=\frac{3i}{2-i}=\frac{-3+6i}{5}$

所以 z 的共轭复数为 $\frac{-3-6i}{5}$.

14．在 $x(x+1)(x-1)^3$ 的展开式中，含 x^2 的项的系数是__________．（用数字作答）

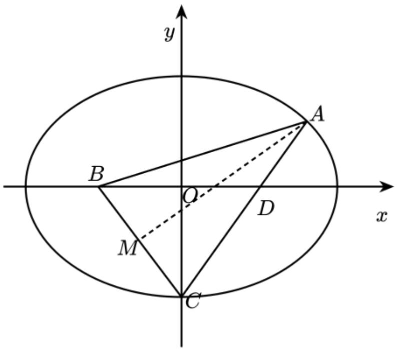
【详解】$(x-1)^3$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_3^r\cdot x^{3-r}\cdot(-1)^r$，其中常数项为 $T_4=-1$，含 x 的项为 $T_3=C_3^2\cdot x=3x$，

又因为 $x(x+1)(x-1)^3=(x^2+x)(x-1)^3$，所以原展开式中含 x^2 的项的系数为：$1\times(-1)+1\times3=2$，

故答案为：2.

15.已知□ABC 为等腰三角形，其中 $AB=AC$，点 D 为边 AC 上一点，$\cos B=\frac{1}{3}$.以点 B、D 为焦点的椭圆 E 经过点 A 与 C，则椭圆 E 的离心率的值为_____.

详解】



连接点A与 BC 中点 M，即有 $BM=CM$，由 $AB=AC$，故 $AM\perp BC$，

由 $\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$，则 $BM=\frac{1}{3}AB$，即 $BC=\frac{2}{3}AB$，

由椭圆定义可得 $AB+AD=2a$、$BC+CA=2a$，

故 $AB+AD+BC+CA=AB+AC+BC=\frac{8}{3}AB=4a$，

即 $AB=\frac{3}{2}a$，则 $BC=a$、$CD=2a-a=a$，

由 $AB=AC$ 故 $\cos\angle BCA=\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$，

则 $\cos\angle BCA=\frac{a^2+a^2-4c^2}{2a\times a}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{2a^2-4c^2}{2a^2}=1-2e^2=\frac{1}{3}$，

解得 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$（负值舍去）.故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16.若函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$ 与 $g(x)=x^2$ 的图像在实数集R上有且只有3个交点，则实数 a 的取值范围为

__________.

【详解】即 $a^x=x^2$ 仅有3个解，

$x=0$ 显然不是该方程的解，则 $\ln a^x=\ln x^2$，即 $\ln a=\frac{\ln x^2}{x}$ 仅有3个解，

设 $h(x)=\dfrac{\ln x^2}{x},(x\neq 0)$，定义域关于原点对称，且满足 $h(-x)=\dfrac{\ln x^2}{-x}=-h(x)$。

即 $h(x)$ 为奇函数，

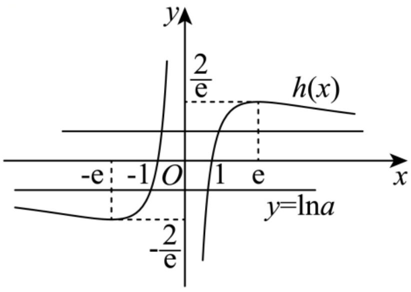
考虑 $x>0$ 时的情况，$h(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，$h'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，

当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，

当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

则函数极大值为 $h(e)=\dfrac{2}{e}$，且当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h(x)>0$；

结合函数 $h(x)$ 为奇函数，即可作出函数 $h(x)$ 的图象如图示：



由于 $\ln a=\dfrac{\ln x^2}{x}$ 仅有 3 个解，故 $y=\ln a$ 与函数 $h(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$ 的图象仅有 3 个交点，

结合图象可得 $0<\ln a<\dfrac{2}{e}$ 或 $-\dfrac{2}{e}<\ln a<0$，

即 $1<a<e^{\frac{2}{e}}$ 或 $e^{-\frac{2}{e}}<a<1$，

故答案为：$1<a<e^{\frac{2}{e}}$ 或 $e^{-\frac{2}{e}}<a<1$

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17.已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=1$，且满足 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{3n-1}$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\left\{\dfrac{2^{a_n}}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n．

【解答】解：（1）证明：$\because na_{n+1}=(n+1)a_n$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$，$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dots\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{1}=n(n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时，上式成立，

$\therefore a_n=n(n\in N^*)$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{3n-1}$；……………………………………………5 分

（2）由（1）得 $\dfrac{2^{a_n}}{b_n}=2^n\times(3n-1)$，

$\therefore T_n=2\times2^1+5\times2^2+8\times2^3+\cdots+(3n-4)\times2^{n-1}+(3n-1)\times2^n$ ①，

$\therefore 2T_n=2\times2^2+5\times2^3+8\times2^4+\cdots+(3n-4)\times2^n+(3n-1)\times2^{n+1}$ ②，

$\therefore$ ①－②得，$-T_n=4+3\times(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n)-(3n-1)\times2^{n+1}=4+3\times\dfrac{2^2\times(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)\times2^{n+1}=-8-(3n-4)\times2^{n+1}$，

$\therefore T_n=8+(3n-4)\cdot2^{n+1}$． ……………………………………12 分

18.某企业有甲、乙、丙三个部门，其员工人数分别为 6，9，12，员工 A 隶属于甲部门．现在医务室通过血检进行一种流行疾病的检查，已知该种疾病随机抽取一人血检呈阳性的概率为 $\dfrac{1}{2}$，且每个人血检是否呈阳性相互独立．

（Ⅰ）现采用分层抽样的方法从中抽取 9 人进行前期调查，求从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人，并求员工 A 被抽到的概率；

（Ⅱ）将甲部门的 6 名员工随机平均分成 2 组，先将每组的血样混在一起化验，若结果呈阴性，则可断定本组血样全部为阴性，不必再化验；若结果呈阳性，则本组中至少有一人呈阳性，再逐个化验．记 X 为甲部门此次检查中血样化验的总次数，求 X 的分布列和期望．

【解答】解：（1）由题意知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 $6:9:12=2:3:4$，

所以分层抽样抽取的 9 人中，甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 2 人，3 人，4 人，

记事件 M 为“员工 A 被抽到”，则 P（A）$=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$． ……………………………………4 分

（2）甲部门的 6 名员工随机平均分成 2 组，每组 3 人，

记“每组血样化验结果呈阴性”为事件 B，则 P（B）$=(1-\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$，

所以 X 的所有可能取值为 2，5，8，

$P(X=2)=(P(B))^2=\dfrac{1}{64}$，

$P(X=5)=C_2^1P(\bar{B})\cdot P(B)=2\times(1-\dfrac{1}{8})\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{14}{64}=\dfrac{7}{32}$，

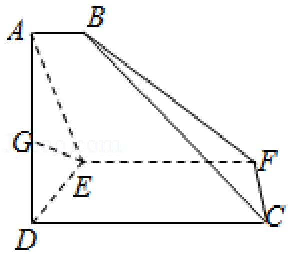
$P(X=8)=C_2^2(P(\bar{B}))^2=(1-\dfrac{1}{8})^2=\dfrac{49}{64}$， ……………………………………8 分

所以 X 的分布列如下，

X	2	5	8
P	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{7}{32}$	$\dfrac{49}{64}$

所以数学期望 $E(X)=2\times\dfrac{1}{64}+5\times\dfrac{7}{32}+8\times\dfrac{49}{64}=\dfrac{29}{4}$． ……………………………………12 分

19. 如图，已知梯形 $CDEF$ 与 ΔADE 所在平面垂直，$AD\perp DE$，$CD\perp DE$，$AB//CD//EF$，$AE=2DE=8$，$AB=3$，$EF=9$．$CD=12$，连接 BC，BF．



（Ⅰ）若 G 为 AD 边上一点，$DG=\dfrac{1}{3}DA$，求证：$EG//$ 平面 BCF；

（Ⅱ）求二面角 $E-BF-C$ 的余弦值．

【解答】证明：（Ⅰ）$\because$ 梯形 $CDEF$ 与 ΔADE 所在平面垂直，$AD\perp DE$，$CD\perp DE$，$AB//CD//EF$，

$\therefore$ 以 D 为原点，DC 为 x 轴，DE 为 y 轴，DA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$\because AE=2DE=8$，$AB=3$，$EF=9$．$CD=12$，连接 BC，BF．G 为 AD 边上一点，$DG=\dfrac{1}{3}DA$，

$\therefore E(0,4,0)$，$G(0,0,\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$，$B(3,0,4\sqrt{3})$，$C(12,0,0)$，$F(9,4,0)$，

$\overrightarrow{BC}=(9,0,-4\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BF}=(6,4,-4\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EG}=(0,-4,\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$，

设平面 BCF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=9x-4\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=6x+4y-4\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $z=3\sqrt{3}$，得 $\vec{n}=(4,3,3\sqrt{3})$，

$\because \overrightarrow{EG}\cdot\vec{n}=-12+12=0$，$EG\not\subset$ 平面 BCF，

$\therefore EG//$ 平面 BCF．……………………………………….5 分

解：（Ⅱ）$\overrightarrow{EB}=(3,-4,4\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(9,0,0)$，

设平面 BEF 的法向量 $\vec{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=3a-4b+4\sqrt{3}c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=9a=0\end{cases}$，取 $c=1$，$\vec{m}=(0,\sqrt{3},1)$，

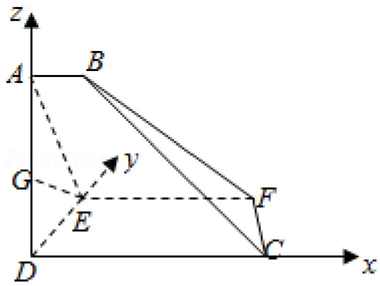
平面 BFC 的法向量 $\vec{n}=(4,3,3\sqrt{3})$，

设二面角 $E-BF-C$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{52}}=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$．……………………………………….10 分

由图知二面角 $E-BF-C$ 的平面角为钝角，

$\therefore$ 二面角 $E-BF-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$．……………………………………….12 分



20．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 M．

（Ⅰ）若 $M(-2,-1)$，求证：$|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$；

（Ⅱ）过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C、D 两点，与直线 $x=-2$ 相交于点 N．求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}+\frac{1}{|NC|}+\frac{1}{|ND|}$ 的最大值．

【详解】(1) 证明：设 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，因为椭圆 E 的焦距为 2，所以 $2c=2$，解得 $c=1$．

又因为椭圆 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，所以 $b^2=a^2-c^2=2-1=1$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

因为直线 l 经过 $M(-2,-1)$、$F(-1,0)$，$k_{MF}=\frac{-1-0}{-2-(-1)}=1$，

所以，直线 l 的方程为 $y=x+1$，

设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=x+1\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $3x^2+4x=0$，

由 $3x^2+4x=0$，得 $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=0$．　………………………………………………………………2 分

所以 $|MA|\cdot|BF|=\sqrt{2}|x_1+2|\cdot\sqrt{2}|x_2+1|=2\times\frac{2}{3}\times1=\frac{4}{3}$，

$|MB|\cdot|AF|=\sqrt{2}|x_2+2|\cdot\sqrt{2}|x_1+1|=2\times2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，

因此，$|MA|\cdot|BF|=|MB|\cdot|AF|$……………………………………………………………………………5 分

(2) 证明：若直线 l、m 中两条直线分别与两条坐标轴垂直，则其中有一条必与直线 $x=-2$ 平行，不合乎题意，

所以，直线 l 的斜率存在且不为零，设直线 l 方程为 $y=k(x+1)$，

则直线 m 方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+1)$，其中 $k\neq0$．

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $A_1(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $\Delta=16k^4-8(2k^2+1)(k^2-1)=8(k^2+1)>0$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$， ……………………………………………………………6 分

易知 $x_1>-2$ 且 $x_2>-2$，将 $x=-2$ 代入直线 l 的方程可得 $y=-k$，即点 $M(-2,-k)$，

所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x_1+2|}+\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x_2+2|}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(\dfrac{1}{x_1+2}+\dfrac{1}{x_2+2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+4}{\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}+\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}+4}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\dfrac{4k^2+4}{2k^2+2}=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$， ……………………………………………………………8 分

同理可得 $\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{k}\right)^2}}=\dfrac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}$， ……………………………………………………………9 分

所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}=\dfrac{2(1+|k|)}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{\dfrac{k^2+1+2|k|}{k^2+1}}=2\sqrt{1+\dfrac{2}{|k|+\dfrac{1}{|k|}}}$

$\le 2\sqrt{1+\dfrac{2}{2\sqrt{|k|\cdot\dfrac{1}{|k|}}}}=2\sqrt{2}$， ……………………………………………………11 分

当且仅当 $k=\pm1$ 时，等号成立，

因此，$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}+\dfrac{1}{|NC|}+\dfrac{1}{|ND|}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$ ……………………………………………………12 分

21．已知函数 $f(x)=x^2-ax+1,g(x)=\ln x+a(a\in R)$.

（Ⅰ）若 $a=1,f(x)>g(x)$ 在区间 $(0,t)$ 上恒成立，求实数 t 的取值范围；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公切线，求实数 a 的取值范围.

【详解】(1) 由题意，当 $a=1$ 时，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则 $h(x)=x^2-x+1-\ln x-1=x^2-x-1\ln x(x>0)$，

$h'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$， ………………………………………1 分

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$（舍负）

$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=0$ ………………………………………2 分

根据题意 t 的取值范围为 $(0,1]$ ………………………………………4 分

（2）设函数 $f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处与函数 $g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处有相同的切线，

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，$\therefore 2x_1-a=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a}{x_1-x_2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{2x_2}+\dfrac{a}{2}$，代入 $\dfrac{x_1-x_2}{x_2}=x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a$

得 $\dfrac{1}{4x_2^2}+\dfrac{a}{2x_2}+\ln x_2+\dfrac{a^2}{4}+a-2=0$.

$\therefore$ 问题转化为：关于 x 的方程 $\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{a}{2x}+\ln x+\dfrac{a^2}{4}+a-2=0$ 有解，……………………………….6 分

设 $F(x)=\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{a}{2x}+\ln x+\dfrac{a^2}{4}+a-2(x>0)$，则函数 $F(x)$ 有零点，

$\because F(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2+\ln x+a-2$，当 $x=e^{2-a}$ 时，

$\ln x+a-2=0$，$\therefore F\left(e^{2-a}\right)>0$.

$\therefore$ 问题转化为：$F(x)$ 的最小值小于或等于 0……………………………….7 分

$F'(x)=-\dfrac{1}{2x^3}-\dfrac{a}{2x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-ax-1}{2x^3}$，

设 $2x_0^2-ax_0-1=0(x_0>0)$，则

当 $0<x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$.

$\therefore F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)$ 的最小值为 $F(x_0)=\dfrac{1}{4x_0^2}+\dfrac{a}{2x_0}+\ln x_0+\dfrac{a^2}{4}+a-2$……………………………9 分

由 $2x_0^2-ax_0-1=0$ 知 $a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}$，

故 $F(x_0)=x_0^2+2x_0-\dfrac{1}{x_0}+\ln x_0-2$.

设 $\varphi(x)=x^2+2x-\dfrac{1}{x}+\ln x-2(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}>0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because \varphi(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$\varphi(x)\le 0$，

$\therefore F(x)$ 的最小值 $F(x_0)\le 0$ 等价于 $0\le x_0\le 1$……………………………11 分

又∵函数 $y=2x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

$\therefore a=2x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\infty,1]$……………………………12 分

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程 $\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-\sqrt{3}=0$.

（Ⅰ）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）$\theta\in[0,2\pi)$，直线 l 与 C 交于 MN 两点，求 M,N 两点的极坐标

【详解】(1) 方法一：曲线 C:由题意得 $x=-2+\frac{4}{1+t^2}$，即 $x+2=\frac{4}{1+t^2}$，$\therefore t=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{x+2}$，

然后代入 $x+2=\frac{4}{1+t^2}$，即可得到曲线 C 的普通方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$，　………………3 分

备注：若没有扣点，则扣 1 分

而直线 l，将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入其极坐标方程即可得其直角坐标方程 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$.

………………2 分

方法二：因为 $3x^2+4y^2=\frac{12(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\frac{48t^2}{(1+t^2)^2}=12\times\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}=12$，

所以 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$，直线 l 的直角坐标方程为：$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$；

方法三：由万能公式：$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\cos\theta=\frac{1-2\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$，

令 $t=\tan^2\frac{\theta}{2}$，则有 $x=2\cos\theta, y=\sqrt{3}\sin\theta$，

由椭圆的常用参数方程可得：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$，

直线 l 的方程为：$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$.

(2) 设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} 3x^2+4y^2-12=0 \\ y=\sqrt{3}(x-1) \end{cases}$ 得 $5y^2+2\sqrt{3}y-9=0$.

解得 $y_1=-\sqrt{3}$，$y_2=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，M 点的坐标为 $(0,-\sqrt{3})$，N 点的坐标为 $\left(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$………………6 分

所以 M 点的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，………………8 分

N 点的极径为 $\dfrac{\sqrt{91}}{5}$………………10 分

23.已知函数 $f\left(x\right)=|2x+3|+|2x-2|$，$g(x)=\sin 2x$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)+g(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $a,b\in(-1,1)$，求证：$|2a+1|-|1-2b|<|2ab+2|$．

【详解】(1) 由题设 $f\left(x\right)=\begin{cases}-4x-1,x\le-\dfrac{3}{2}\\5,-\dfrac{3}{2}<x\le1\\4x+1,x>1\end{cases}$，………………2 分

而 $g(x)=\sin 2x$ 在 $(-\infty,-\frac{3}{2}]$、$(-\dfrac{3}{2},1]$、$(1,+\infty)$ 上均能取到最小值 -1，………………3 分

对于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ 上递减，$(-\dfrac{3}{2},1]$ 上为常数，$(1,+\infty)$ 上递增，且连续，

所以 $f(x)+g(x)$ 的最小值在 $(-\dfrac{3}{2},1]$ 上取得，即 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 时，最小值为 4………………5 分

(2) 由 $|2a+1|-|1-2b|\le|2a+1-1+2b|=2|a+b|$，仅当 $(2a+1)(1-2b)\ge0$ 取等号，………………7 分

要证 $|2a+1|-|1-2b|<|2ab+2|$，即证 $|a+b|<|ab+1|$，则 $(a+b)^2<(ab+1)^2$，

需证 $(ab)^2-a^2-b^2+1=(a^2-1)(b^2-1)>0$，而 $a,b\in(-1,1)$，即 $a^2,b^2\in[0,1)$，

所以 $(a^2-1)(b^2-1)>0$ 恒成立，故 $|2a+1|-|1-2b|<|2ab+2|$ 得证………………10 分

备注：此题可用其它方法证明