

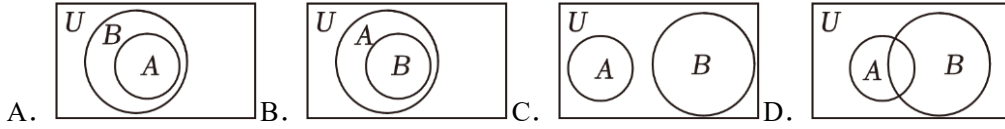
成都市石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届入学考试 数学试题（文）

（总分：150 分，时间：120 分钟）

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，能表示集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x, 0\}$ 与 $B = \{1, 2\}$ 关系的 Venn 图是（ ）



2. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 2)$ ，则 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a} - \vec{b}$ 方向上投影为（ ）

- A. 4 B. -2 C. 2 D. -4

3. 5G 技术在我国已经进入高速发展的阶段，5G 手机的销量也逐渐上升，某手机商城统计了最近 5 个月手机的实际销量，如表所示：

月份 x	1	2	3	4	5
销售量 y （千只）	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若 y 与 x 线性相关，且线性回归方程为 $\hat{y} = 0.24x + \hat{a}$ ，则下列说法不正确的是（ ）

- A. 由题中数据可知，变量 y 与 x 正相关，且相关系数 $r < 1$
 B. 线性回归方程 $\hat{y} = 0.24x + \hat{a}$ 中 $\hat{a} = 0.26$
 C. 残差 $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的最大值与最小值之和为 0
 D. 可以预测 $x = 6$ 时该商场 5G 手机销量约为 1.72（千只）

4. 方程 $\frac{x^2}{m+3} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示双曲线的必要不充分条件可以是（ ）

- A. $m \in (-3, 1)$ B. $m \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$ C. $m \in (-3, +\infty)$ D. $m \in (-3, -1)$

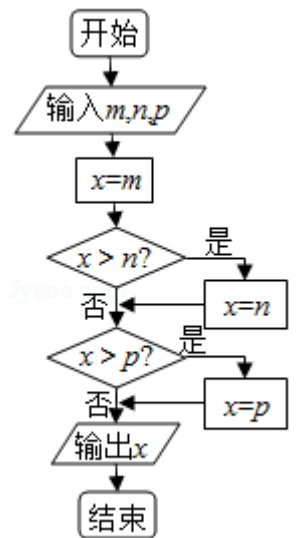
5. 执行如图所示的程序框图，若依次输入 $m = \frac{\ln 2}{2}$ ， $n = \frac{\ln 3}{3}$ ， $p = \frac{\ln 5}{5}$ ，则输出的结果为（ ）

- A. $\frac{\ln 2}{2}$ B. $\frac{\ln 3}{3}$ C. $\frac{\ln 5}{5}$ D. 以上都不对

6. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$$
，则 $\overline{AB} \cdot \overline{BC} =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 2 D. -2

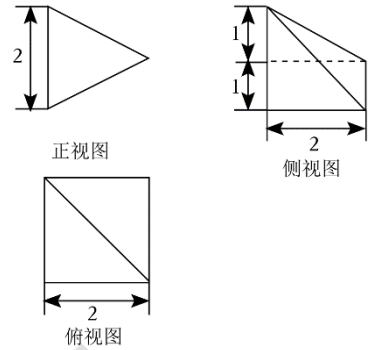


7. 设等差数列的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_6 = 36$ ， $S_{n-6} = 144$ ， $S_n = 324$ ，则 n 的值为()

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

8. 如图是某四棱锥的三视图，则该四棱锥的高为()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

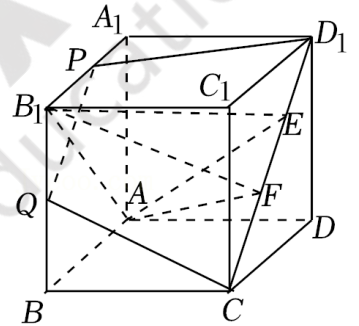


9. 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A ， B 是抛物线上的两个动点，且满足 $AF \perp BF$ ， P 为线段 AB 的中点，设 P 在 l 上的射影为 Q ，则 $\frac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值是()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 CD_1 上有两个动点 E ， F ，且 $EF = \frac{1}{2}$ ，点 P ， Q 分别为 A_1B_1 ， BB_1 的中点， G 在侧面 CDD_1C_1 上运动，且满足 $B_1G \parallel$ 平面 CD_1PQ ，以下命题错误的是()

- A. $AB_1 \perp EF$
 B. 多面体 $AEFB_1$ 的体积为定值
 C. 侧面 CDD_1C_1 上存在点 G ，使得 $B_1G \perp CD_1$
 D. 直线 B_1G 与直线 BC 所成的角可能为 $\frac{\pi}{6}$



11. 已知直线 $l_1: x + y - 4 = 0$ 与圆心为 $M(0,1)$ 且半径为 3 的圆相交于 A ， B 两点，直线 $l_2: 2mx + 2y - 3m - 5 = 0$ 与圆 M 交于 C ， D 两点，则四边形 $ACBD$ 的面积的值最大是()

- A. $9\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $9(\sqrt{2} + 1)$

12. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个极值点，给出下列四个结论：

- ① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点；
 ② $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$ ；
 ③ ω 的取值范围是 $\left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right]$ ；
 ④ $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{23}, \frac{\pi}{19}\right)$ 上单调递增。

其中正确结论的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 若 $(2-i) \cdot z = 3i$ ，则 z 的共轭复数为_____

14. 向面积为 2 的 $\triangle ABC$ 内部投掷一点 P ，则 $\triangle PBC$ 为的面积小于 1 的概率为_____

15. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，其中 $AB=AC$ ，点 D 为边 AC 上一点， $\cos B = \frac{1}{3}$. 以点 B, D 为焦点的椭圆 E 经过点 A 与 C ，则椭圆 E 的离心率的值为_____.

16. 若函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 与 $g(x) = x^2$ 的图像在实数集 \mathbf{R} 上有且只有 3 个交点，则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 1$ ，且满足 $na_{n+1} = (n+1)a_n$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{3n-1}$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设数列 $\left\{ \frac{2^{a_n}}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .

18. 某企业有甲、乙、丙三个部门，其员工人数分别为 24, 16, 8. 现在医务室通过血检进行一种流行疾病的检查.

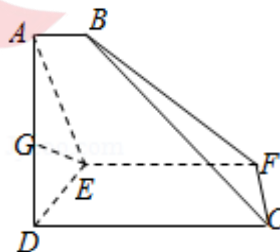
(I) 现采用分层抽样的方法从中抽取 6 人进行前期调查，求甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取的人数和每一位员工被抽到的概率？

(II) 将该企业所有员工随机平均分成 4 组，先将每组的血样混在一起化验，若结果呈阴性，则可断定本组血样全部为阴性，不必再化验；若结果呈阳性，则本组中至少有一人呈阳性，再逐个化验. 已知每组化验结果呈阴性的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，记 $B_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为“第 i 组化验结果呈阴性”， $\bar{B}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为“第 i 组化验结果呈阳性”，请计算恰有两个组需要进一步逐个化验的概率.

19. 如图，已知梯形 $CDEF$ 与 $\triangle ADE$ 所在的平面垂直， $AD \perp DE$ ， $CD \perp DE$ ， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AE = 2DE = 8$ ， $AB = 3$ ， $EF = 9$ ， $CD = 12$ ，连接 BC ， BF .

(I) 若 G 为 AD 边上一点， $DG = \frac{1}{3}DA$ ，求证： $EG \parallel$ 平面 BCF ；

(II) 求多面体 $ABCDEF$ 的体积.



20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点，与直线 $x = -2$ 相交于点 M .

(I) 若 $M(-2, -1)$, 求证: $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$;

(II) 过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C 、 D 两点, 与直线 $x = -2$ 相交于点 N . 求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的最大值.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 1, g(x) = \ln x + a (a \in \mathbb{R})$.

(I) 若 $a = 1, f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, t)$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围;

(II) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公切线, 求实数 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数) 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为

极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程 $\sqrt{3}\rho \cos \theta - \rho \sin \theta - \sqrt{3} = 0$.

(I) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(II) $\theta \in [0, 2\pi)$, 直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 其中 N 点在第一象限, 求 M 点的极坐标及 N 点的极径.

23. 已知函数 $f(x) = |2x+3| + |2x-2|, g(x) = \sin 2x$.

(I) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的最小值;

(II) 设 $a, b \in (-1, 1)$, 求证: $|2a+1| - |1-2b| < |2ab+2|$.