树德中学高2021级高三上学期期末测试数学（文科）试题

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

一、选择题 本大题共12个小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\},B=\{x\mid y=\log_2(x-1)\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-1,3)$　　C．$(-1,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

2．在复平面内，复数 z_1，z_2 对应的点分别是 $(2,-1),(1,-3)$，则 $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$ 的模是（　　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

3．已知圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的底面半径为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．下列叙述错误的是（　　）

A.命题“$\exists x\in R$，$x^2-1\le -1$”的否定是“$\forall x\in R$，$x^2-1>-1$”

B.若幂函数 $y=(m^2-2m-2)x^{2-4m}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 m 的值为 -1

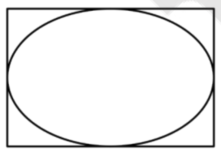
C.$\forall x\in(0,+\infty)$，$2^x>\log_2 x$

D.设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a^2>3$”是“$a>\sqrt{3}$”的充分不必要条件

5．平面直角坐标系内，与点 $A(1,1)$ 的距离为1且与圆 $(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 相切的直线有（　　）

A．0条　　B．4条　　C．2条　　D．3条

6．如图，矩形的长为6，宽为4，在矩形内随机撒300颗黄豆，落在椭圆外的绿豆数为96，以此试验数据为依据可以估计出椭圆的面积为（　　）

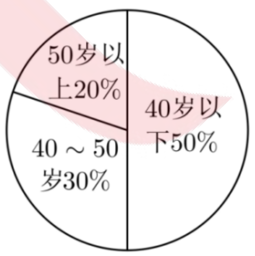


A. 16.32　　B. 15.32　　C. 8.68　　D. 7.68

7．双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线过点 $P(2,4\sqrt{6})$，F_1，F_2 是 C 的左右焦点，且焦点到渐近线的距离为 $2\sqrt{6}$，若双曲线上一点 P 满足 $|PF_1|=5$，则 $|PF_2|=$（　　）

A．3或7　　B．7　　C．5　　D．3

8．某中学200名教师年龄分布图如图所示，从中随机抽取40名教师作样本，采用系统抽样方法，按年龄从小到大编号为1~200，分为40组，分别为1~5，6~10，…，196~200.若从第4组抽取的号码为18，则样本中40~50岁教师的编号之和为（　　）

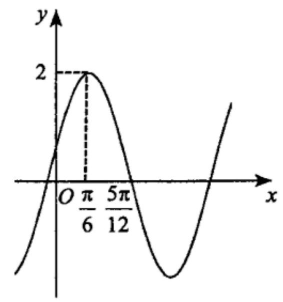


A．906　　B．966　　C．1506　　D．1566

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x-1,x\le 1\\ \log_a x,x>1\end{cases}$，满足对任意 $x_1\ne x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(2,3]$　　D．$(2,+\infty)$

10．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A．$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\sqrt{3}$

B．$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

C．$f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(-\frac{\pi}{12}+k\pi,0\right)$，$k\in Z$

D．$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y=A\sin 2x$ 的图象

11．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，P 为 BC 的中点，过点 C 作与直线 D_1P 垂直的平面 α，则平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面的周长为（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$6\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}+\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le 1\\ |\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$，若方程 $f(x)=m|x-1|$ 有5个不同的实数根，且最小的两个实数根为 x_1,x_2，则 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{2e-1}{e^2})$　　B．$(0,\frac{2e+1}{e^2})$　　C．$(\frac{1}{e},\frac{2e+1}{e^2})$　　D．$(\frac{2e-1}{e^2},\frac{2}{e})$

二、填空题（每题5分，满分20分，将答案填在答题纸上）

13．已知 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(2,3)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影等于________.

14．已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-1\le 0\\ 2x+y+1\ge 0\\ x-2y+3\ge 0\end{cases}$，则 $\frac{y+3}{x+2}$ 的最大值为________.

15．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线与抛物线 C 交于 A，B 两点（点 A 在第一象限），若点 D 为抛物线 C 的准线上一点，且 $|AF|=|AD|=3$，则直线 BD 的斜率为________.

16．已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，一直线分 $\triangle ABC$ 为面积相等的两个部分，且夹在 AB、BC 之间的线段为 MN，则 MN 长度的最小值为______.

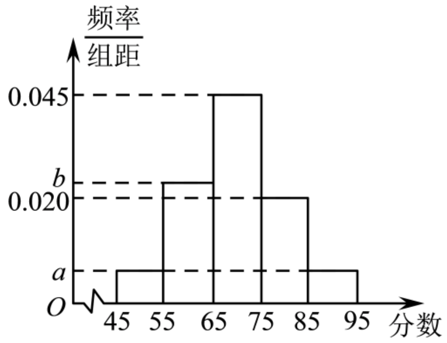
三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. （本小题满分 12 分）2020 年 1 月 15 日教育部制定出台了“强基计划”，2020 年起不再组织开展高校自主招生工作，改为实行强基计划，强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生，据悉强基计划的校考由试点高校自主命题，校考过程中通过笔试，进入面试环节 .现随机抽取了 100 名同学的面试成绩，并分成五组：第一组$[45,55)$，第二组$[55,65)$，第三组$[65,75)$，第四组$[75,85)$，第五组$[85,95]$，绘制成如图所示的频率分布直方图. 已知第三、四、五组的频率之和为 0.7，第一组和第五组的频率相同.

（1）求 a，b 的值；

（2）估计这 100 名同学面试成绩的中位数（数精确到 0.1）；

（3）在第四、第五两组中，采用分层抽样的方法从中抽取 5 人，然后再从这 5 人中选出 2 人，求选出的两人来自不同组的概率.



18. (本题满分 12 分）已知数列数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，　$(n+2)b_n=nb_{n+1}$，其中 $n\in\mathrm{N}^*$.

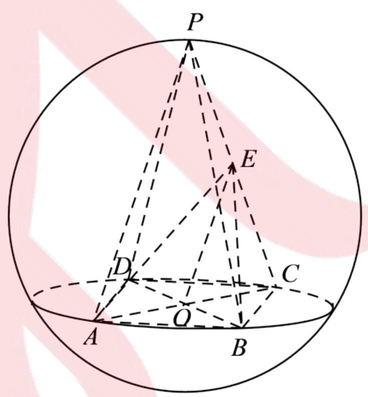
（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$c_n=\dfrac{4\cdot 3^{n-1}}{n+1}$，求数列$\{b_nc_n\}$的前 n 项和T_n .

19. （本小题满分 12 分）已知球内接正四棱锥$P-ABCD$的高为3, AC, BD相交于O，球的表面积为$\dfrac{169\pi}{9}$，若E为PC中点.

（1）求异面直线BP和AD所成角的余弦值；

（2）求点E到平面PAD的距离.



20. （本小题满分 12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，其上顶点到右顶点的距离为$\sqrt{5}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）若O为坐标原点，直线l与椭圆C相交于A，B两点，与y轴相交于$M(0,m)$点，若存在实数m，使得$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OM}$，求实数$m$的取值范围.

21. (本小题满分 12 分）已知函数$P(x)=x-\lambda\ln x$，$(\lambda\in\mathrm{R})$.

（1）若函数$y=P(x)$只有一个零点，求实数λ的取值所构成的集合；

（2）已知$\lambda\in(0,e)$，若$f(x)=e^{\lambda x}-x+P(x)$，函数$f(x)$的最小值为$h(\lambda)$，求$h(\lambda)$的值域.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22. （10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=2+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$）. 以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=m(\rho\in\mathbf{R})$.

（1）求曲线C的普通方程和直线l的直角坐标方程；

（2）若直线l与曲线C有 2 个公共点，求m的取值范围.

23. （10 分）已知函数$f(x)=|x|+|x-2|+1$.

（1）解不等式$f(x)\leq 7$；

（2）若不等式$mx+2\leq f(x)(m>0)$对于$x\in\mathbf{R}$恒成立，求m的取值范围.

高 2021 级高三期末考试数学试题（文科）参考答案

一、1－5CDADD 6－10ABDCB 11－12CB

二、 13、$\frac{4\sqrt{13}}{13}$ 14、4 15、$-2\sqrt{2}$ 16、2

三、17、解：（1）由题意可知：$10(a+0.045+0.020)=0.7$，$(2a+b+0.045+0.020)\times10=1$，

解得 $a=0.005$，$b=0.025$；

（2）由频率分布直方图估计众数为$\frac{65+75}{2}=70$，前两个分组频率之和为 0.3，前三个分组频率之和为 0.75，则估计中位数为$65+\frac{0.5-0.3}{0.75-0.3}\times10=65+\frac{40}{9}\approx69.4$；

（3）根据分层抽样，$[75,85)$和$[85,95]$的频率比为$\frac{0.02}{0.005}=4$，故在$[75,85)$和$[85,95]$中分别选取 4 人和 1 人，分别设为a_1,a_2,a_3,a_4和b_1，则在这 5 人中随机抽取两个的样本空间Ω包含的样本点有

$a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_1b_1,a_2a_3,a_2a_4,a_2b_1,a_3a_4,a_3b_1,a_4b_1$共 10 个，即$n(\Omega)=10$，记事件$A=$“两人来自不同组”，

则事件 A 包含的样本点有$a_1b_1,a_2b_1,a_3b_1,a_4b_1$共 4 个，即$n(A)=4$，

所以$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

18、（1）由$(n+2)b_n=nb_{n+1}$得：$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$，故$\frac{b_2}{b_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{b_3}{b_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{b_4}{b_3}=\frac{5}{3}$，……，$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$，

$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

以上 n-1 个式子相乘得，$\frac{b_n}{b_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，故$b_n=n(n+1)$；

（2）由$c_n=\frac{4\cdot3^{n-1}}{n+1}$，结合（1）可得：$b_nc_n=4n\cdot3^{n-1}$，

所以$T_n=b_1c_1+\ldots+b_nc_n=4\times(1\times3^0+2\times3^1+\ldots+n\cdot3^{n-1})$，$3T_n=4\times[1\times3^1+2\times3^2+\ldots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n]$，

两式相减得，$-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n)$，

所以$-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n)$，故$T_n=1+(2n-1)\cdot3^n$.

19、（1）由球的表面积公式$S=4\pi R^2=\frac{169\pi}{9}$，得$R=\frac{13}{6}$，

设球心为O_1，在正四棱锥$P-ABCD$中，高为$PO=3$，则O_1必在PO上，

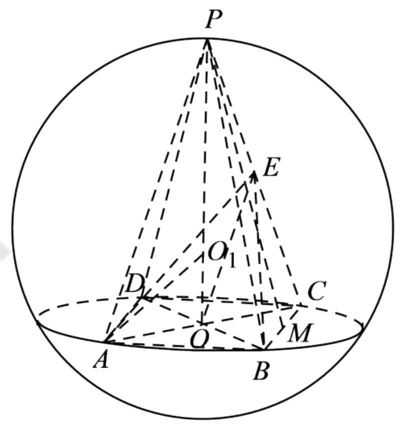
连AO_1，则$O_1O=PO-R=\frac{5}{6},AO_1=R=\frac{13}{6}$，则在$\text{Rt}\triangle O_1OA$，有$OO_1^2+OA^2=O_1A^2$，即$OA=2$，可得

正方形$ABCD$的边长为$2\sqrt{2}$,侧棱$PA=\sqrt{OP^2+OA^2}=\sqrt{13}$；

在正方形$ABCD$中，$BC//AD$，所$\angle PBC$以是异面直线BP和AD所成的角或其补角，

取BC中点M，在等腰$\triangle PBC$中，可得$PM\perp BC$，斜高$PM=\sqrt{11}$，

则在$\text{Rt}\triangle PMB$中，$\cos\angle PBC=\frac{BM}{PB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$，



所以异面直线BP和AD所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{26}}{13}$；

（2）由O,E为CA,CP中点，得$OE//AP$，

且满足$OE\not\subset$平面$PAD,AP\subset$平面PAD，所以$OE//$平面PAD，

所以E到平面PAD的距离等于O到平面PAD的距离，

又因为$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{22},S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$，

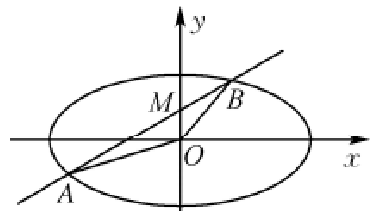
再设O到平面PAD的距离为h，则由$V_{O-PAD}=V_{P-AOD}$，

可得$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AOD}\cdot PO$，即$\sqrt{22}h=2\times3$，则$h=\frac{3\sqrt{22}}{11}$，

所以点E到平面PAD的距离$\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

20、解：(1)由题意得，$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5},\\a^2=b^2+c^2,\\e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得$a^2=4$，$b^2=1$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)当直线l不存在斜率时，直线与纵轴有无数或没有交点，不符合题意



当直线l存在斜率时，设直线l的方程设为$y=kx+m$，

于是有$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\y=kx+m\end{cases}\Rightarrow(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

因为该直线与椭圆有两个交点，所以有$\varDelta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2$

化简得$4k^2-m^2+1>0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，于是有$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，因为$\overline{OA}+2\overline{OB}=3\overline{OM}$，

所以$(x_1,y_1)+2(x_2,y_2)=3(0,m)\Rightarrow x_1+2x_2=0\Rightarrow x_1=-2x_2$，

代入$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$中，得$-2x_2+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}\Rightarrow x_2=\frac{8km}{1+4k^2}$，于是有$(-2x_2)\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$

$\Rightarrow-2\left(\frac{8km}{1+4k^2}\right)^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，化简，得$k^2=\frac{m^2-1}{4-36m^2}$，代入$4k^2-m^2+1>0$中，

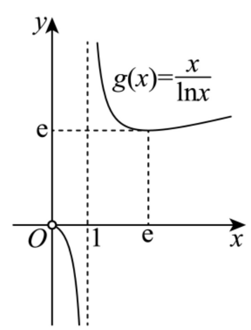
得$4\cdot\frac{m^2-1}{4-36m^2}-m^2+1>0\Rightarrow\frac{1}{9}<m^2<1$，所以$m$的取值范围为$\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

21、解：（1）当$\lambda=0$时，显然不满足题意，

当$\lambda\neq0$时，若函数$y=P(x)$只有一个零点，即$x-\lambda\ln x=0$只有一个根，因为 1 不是方程的根，所以可转化为$\lambda=\frac{x}{\ln x}$只有一个根，即直线$y=\lambda$与函数$g(x)=\frac{x}{\ln x}$（$x>0$且$x\neq1$）的图象只有一个交点.

$g'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2x}$，令$g'(x)=0$，得$x$=e，在$(0,1)$和$(1,e)$上，$g'(x)<0$，在$(e,+\infty)$上，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在和$(1,e)$上单调递减，在$(e,+\infty)$上单调递增.

在x=e时有极小值$g(e)=e$，$g(x)$图象如图所示：



由图可知：若要使直线$y=\lambda$与函数$g(x)=\frac{x}{\ln x}$的图象只有一个交点，

则 $\lambda<0$ 或 $\lambda=\mathrm{e}$，综上 λ 的取值所构成的集合为 $(-\infty,0)\cup\{\mathrm{e}\}$.

（2）由题意知 $f(x)=e^{\lambda x}-\lambda\ln x$，$f'(x)=\dfrac{\lambda}{x}(xe^{\lambda x}-1)$,

令 $t(x)=xe^{\lambda x}-1(x\ge 0)$, 得 $t'(x)=(1+x)e^{\lambda x}>0$, 所 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t(0)=-1<0, t(1)=e^{\lambda}-1>0$. 由零点的存在性定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减; 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $h(\lambda)=f(x_0)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$. 又 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$, 所以 $\lambda=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，又 $\lambda\in(0,e)$，所以 $0<-\dfrac{\ln x_0}{x_0}<e$.

令 $r(x)=-\dfrac{\ln x}{x}\Rightarrow r'(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$, $r(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$r(1)=0, r(\dfrac{1}{e})=e$.

由 $0<-\dfrac{\ln x_0}{x_0}<e$ 得 $\dfrac{1}{e}<x_0<1$. 将 $\lambda=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$ 代入 $h(\lambda)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$，

得 $h(\lambda)=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{(\ln x_0)^2}{x_0}(\dfrac{1}{e}<x_0<1)$. 令 $M(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\ln x)^2}{x}(\dfrac{1}{e}<x<1)$, 得 $M'(x)=-\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2}<0$，

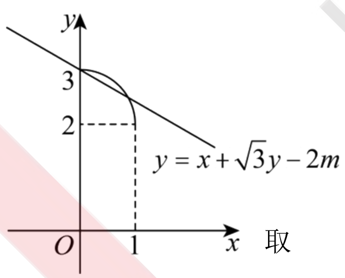
所以 $M(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\ln x)^2}{x}(\dfrac{1}{e}<x<1)$ 在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 单调递减，又 $M(\dfrac{1}{e})=2e, M(1)=1$.

所以 $h(\lambda)$ 的值域为 $(1,2e)$.

22、（1）因为 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$x=\cos\alpha\in[0,1]$，$y=2+\sin\alpha\in[2,3]$，将曲线 C 的参数方程中的参数消去，并结合 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 可得曲线 C 的普通方程为：$x^2+(y-2)^2=1(0\le x\le 1,2\le y\le 3)$.

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=m$，将 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入上式，得直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2m=0$.

（2）曲线 C 是以 $(0,2)$ 为圆心，1 为半径的四分之一圆弧，且圆弧两端点的坐标分别为 $(0,3)$ 和 $(1,2)$，作出曲线 C 与直线 l，如图所示，当直线 l 经过点 $(0,3)$ 时，直线 l 与曲线 C 有两个交点，此时 $m=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 当直线 l 与曲线 C 相切时，有 $\dfrac{|0+2\sqrt{3}-2m|}{2}=1$，解得 $m=1+\sqrt{3}$ 或 $m=\sqrt{3}-1$（舍去）. 数形结合可知 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{3}\right)$.



23、解：（1）$f(x)\le 7$，即 $|x|+|x-2|\le 6$，利用零点分区间法，对 $f(x)$ 去绝对值，当 $x<0$ 时，由 $-2x+2\le 6$，得 $x\ge -2$，所以 $x\in[-2,0)$，当 $0\le x<2$ 时，$2\le 6$ 成立，所以 $x\in[0,2)$，当 $x\ge 2$ 时，由 $2x-2\le 6$，得 $x\le 4$，所以 $x\in[2,4]$. 综上可知，不等式 $f(x)\le 7$ 的解集为 $[-2,4]$.

（2）由题意，可知 $m>0$，由（1）得当 $x<0$ 时，$m\ge -2+\dfrac{1}{x}$ 恒成立，因为 $-2+\dfrac{1}{x}<0$，所以 $m>0$ 时不等式恒成立；

当 $x=0$ 时，$2\le 3$ 恒成立，所以 $m>0$ 时不等式恒成立；

当 $0<x<2$ 时，$m\le\dfrac{1}{x}$ 恒成立，而 $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}$，所以 $0<m\le\dfrac{1}{2}$ 时不等式恒成立；

当 $x\ge 2$ 时，即 $m\le 2-\dfrac{3}{x}$ 恒成立，而 $\dfrac{1}{2}\le 2-\dfrac{3}{x}<2$，所以 $0<m\le\dfrac{1}{2}$ 不等式恒成立.

综上，满足要求的 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.