工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

2023～2024 学年度上期期末高二年级调研考试

数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1 至 2 页,第Ⅱ卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $M(2,-3,1)$ 关于原点对称的点的坐标为

A. $(-2,-3,-1)$　B. $(2,3,-1)$　C. $(-2,3,1)$　D. $(-2,3,-1)$

2. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为

A. $y=-1$　B. $y=-2$　C. $y=1$　D. $y=2$

3. 据统计,2023 年 12 月成都市某区域一周 AQI 指数按从小到大的顺序排列为:45,50,51,53,53,57,60,则这组数据的 25 百分位数是

A. 45　B. 50　C. 51　D. 53

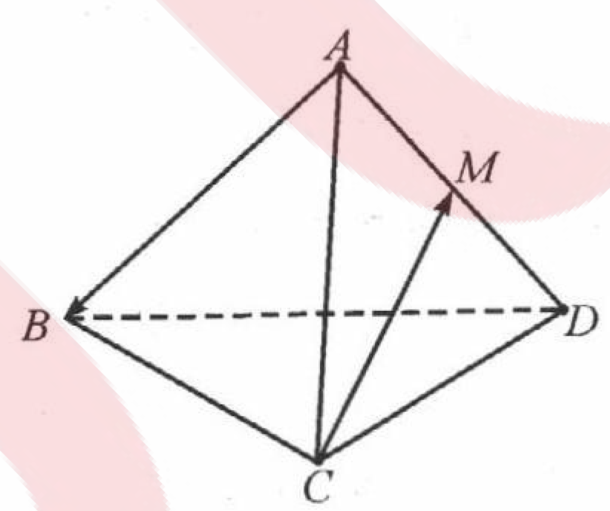
4. 圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 与圆 $(x-7)^2+(y-1)^2=16$ 的位置关系是

A. 相交　B. 内切　C. 外切　D. 内含

5. 已知双曲线的虚轴长是实轴长的 $\sqrt{3}$ 倍,且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 有公共焦点,则该双曲线的标准方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

6. 如图,已知四面体 $ABCD$ 的棱长都是 2,点 M 为棱 AD 的中点,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的值为



A. 1

B. -1

C. -2

D. 2

7. 连续两次抛掷一枚质地均匀的骰子,观察它落地时朝上面的点数.
事件 A_1=“第一次得到的数字是 2”;　事件 A_2=“第二次得到的数字是奇数”;
事件 A_3=“两次得到数字的乘积是奇数”;事件 A_4=“两次得到数字的和是 6”. 则

A. 事件 A_1 和事件 A_2 对立　B. 事件 A_2 和事件 A_4 互斥

C. 事件 A_1 和事件 A_4 相互独立　D. $P(A_2\cup A_3)=P(A_2)$

8. 已知圆 M:$(x-4)^2+y^2=4$,点 P 为直线 $x-y=0$ 上的动点,过点 P 作圆 M 的两条切线,切点分别为 A,B,则 $|AB|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{3}$　B. $\sqrt{2}$　C. $2\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 在男子跳水 10 米台比赛中,某运动员发挥出色. 在他的第一跳中,10 位裁判给出的分数为:9.0,9.1,9.3,9.5,9.5,9.7,9.9,10,10,10,对该组数据下列说法正确的有

A. 众数为 10　B. 平均数为 9.5　C. 极差为 9　D. 中位数为 9.6

10. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5,1)$,边 AB 上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$,边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$,则下列说法正确的有

A. 过点 A 且平行于 CM 的直线的方程为 $2x-y-9=0$

B. 直线 AC 的方程为 $2x+y-11=0$

C. 点 C 的坐标为 $(4,3)$

D. 边 AC 的垂直平分线的方程为 $x-2y-1=0$

11. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,下列说法正确的有

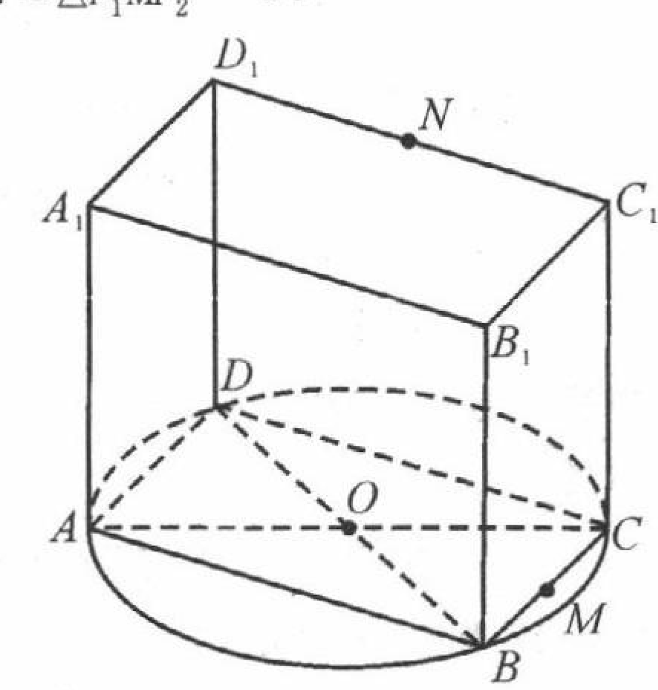
A. 若 $a=3$,则双曲线的离心率为 $\frac{5}{3}$

B. 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$,则 $a=2$

C. 若双曲线的焦距为 10,M 为该双曲线上一点,且 $|MF_1|=7$,则 $|MF_2|=1$

D. 若点 M 为双曲线上一点,且 $|\overrightarrow{MF_1}-\overrightarrow{MF_2}|=2|\overrightarrow{MO}|$,则 $S_{\triangle F_1MF_2}=16$

12. 如图,在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AC=2\sqrt{2}$,$AA_1=2$,点 B,D 在以线段 AC 为直径的圆 O 上运动,且 B,D,O 三点共线,点 M,N 分别是线段 BC,C_1D_1 的中点,下列说法中正确的是



A. 存在点 B,使得平面 ABC_1 与平面 BB_1C_1C 不垂直

B. 当直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积最大时,直线 A_1C 与直线 AB_1 垂直

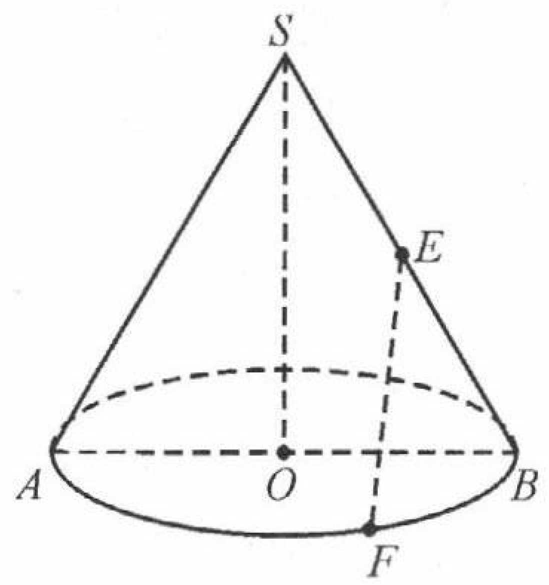
C. 当 $AB=2$ 时,过点 A_1,B,N 的平面截该四棱柱所得的截面周长为 $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$

D. 当 $AB=2$ 时,过 MN 的平面截该四棱柱的外接球,所得截面面积的最小值为 $\frac{5\pi}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 某校高二年级选择“理化生”,“理化地”,“史政地”和“史政生”组合的学生人数分别为 480,40,120 和 80,现采用分层抽样的方法从这些学生中选出 72 人参加一项活动,则“史政生”组合中选出的学生人数为__________.



14. 如图所示,圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形,F 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,E 为 SB 的中点,则直线 SA 与 EF 所成角的大小为__________.

15. 九宫格的起源可以追溯到远古神话中的洛书,洛书上的图案正好对应着从 1 到 9 九个数字,并且纵向、横向、斜向三条线上的三个数字的和(这个和叫做幻和)都等于 15,即现代数学中的三阶幻方. 根据洛书记载:“以五居中,五方皆为阳数,四隅为阴数”,其意思为:九宫格中 5 位于居中位置,四个顶角为偶数,其余位置为奇数. 如图所示,若随机填写一组幻和等于 15 的九宫格数据,记事件 A=“$a+b\geqslant 9$”,则 $P(A)$的值为__________.

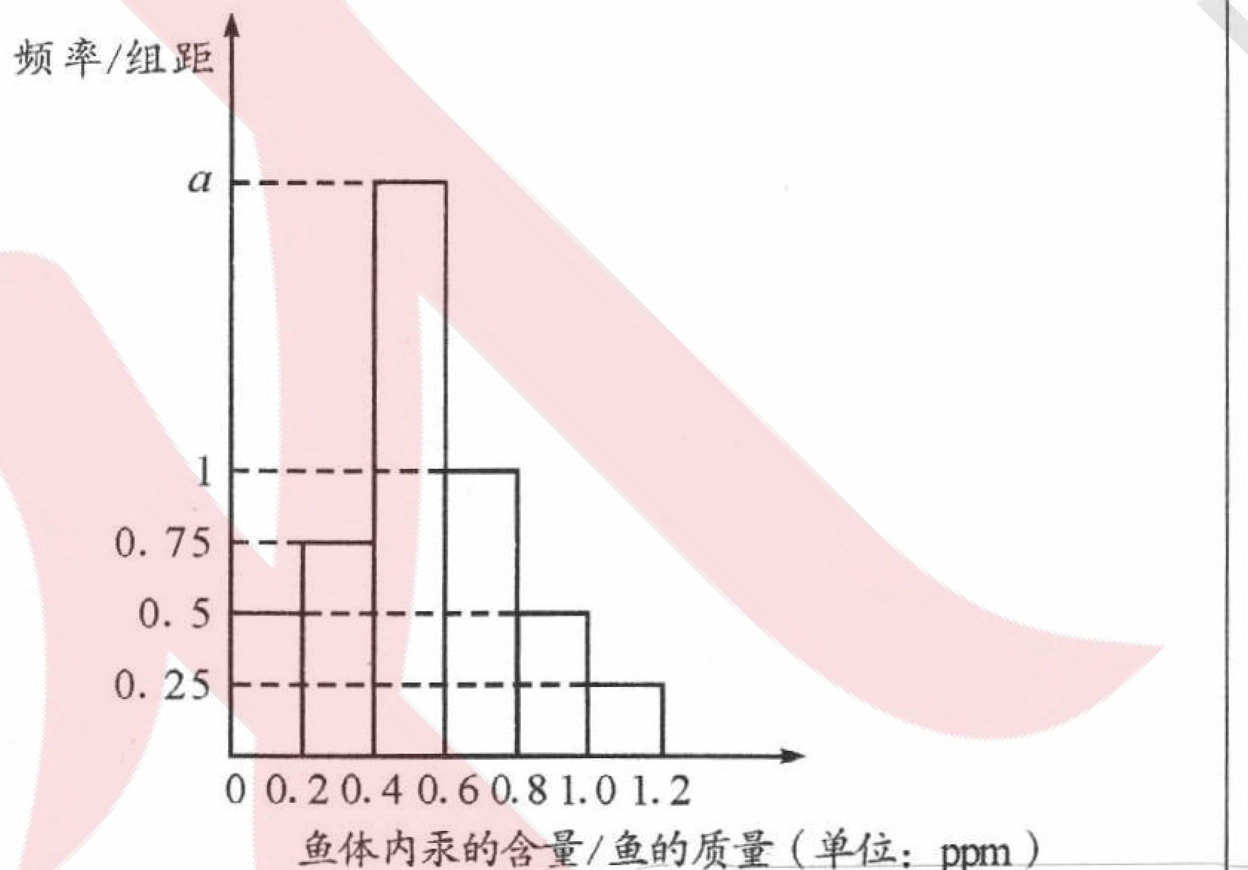
a	d	f
b	5	g
c	e	h

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A,B,动点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 均在椭圆上,O 是坐标原点,记 OP 和 OQ 的斜率分别为 k_1,k_2;$\triangle OBP$ 与 $\triangle OAQ$ 的面积分别为 S_1,S_2. 若 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$,则 S_1S_2 的最大值为__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

为保障食品安全,某质量监督检验中心从当地海鲜市场的 10000 条鱼中随机抽取了 100 条鱼来测量其体内汞的含量,测量指标为:$\frac{\text{鱼体内汞的含量}}{\text{鱼的质量}}$(单位:ppm). 将所得数据分组后,画出了如图所示的频率分布直方图.



(Ⅰ)求频率分布直方图中 a 的值,并估计该样本的中位数;

(Ⅱ)已知当鱼体内汞含量的测量指标超过 1ppm 时,就不符合可食用标准. 用样本估计总体,求这一批鱼中约有多少条不符合可食用标准.

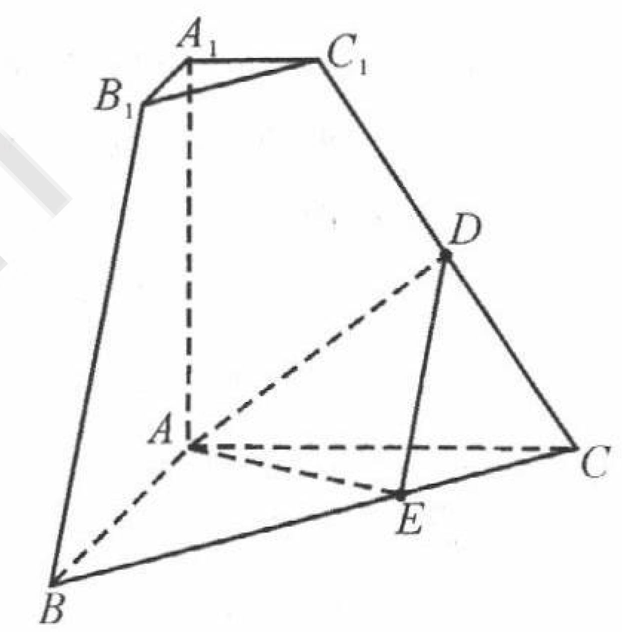
18. (本小题满分 12 分)

已知 $A(2,4)$,$B(-1,1)$,O 为坐标原点,圆 C 为 $\triangle AOB$ 的外接圆.

(Ⅰ)求圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)过原点的直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $3\sqrt{2}$,求直线 l 的方程.

19. (本小题满分 12 分)



如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 $A_1A\perp$ 面 ABC,$AB\perp AC$,$AB=AC=AA_1=3$,$A_1C_1=1$,空间中 D,E 两点分别满足 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

(Ⅰ)证明:$DE\,/\!/$ 平面 ABB_1A_1;

(Ⅱ)求平面 ABB_1A_1 与平面 ADE 的夹角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中,动点 M 与点 $F_2(1,0)$ 的距离和它到直线 $x=4$ 的距离之比是 1∶2.

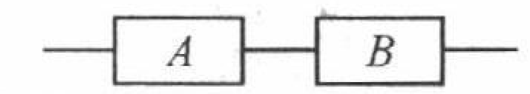
(Ⅰ)求动点 M 的轨迹方程;

(Ⅱ)过点 F_2 的直线 l 与点 M 的轨迹交于 A,B 两点,与直线 $x=4$ 交于点 P,若 $\frac{|AB|}{|PF_2|}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$,求 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

某企业为了推动技术革新,计划升级某电子产品,该电子产品核心系统的某个部件 G 由 2 个电子元件组成. 如图所示,部件 G 是由元件 A 与元件 B 组成的串联电路,已知元件 A 正常工作的概率为 $\frac{2}{3}$,元件 B 正常工作的概率为 $\frac{4}{5}$,且元件 A,B 工作是相互独立的.

(Ⅰ)求部件 G 正常工作的概率;



(Ⅱ)为了促进产业革新,该企业计划在核心系统中新增两个另一产地的电子元件,使得部件 G 正常工作的概率增大. 已知新增元件正常工作的概率为 $p(0.8\leqslant p<1)$,且四个元件工作是相互独立的. 现设计以下三种方案:

方案一:新增两个元件都和元件 A 并联后,再与 B 串联;

方案二:新增两个元件都和元件 B 并联后,再与 A 串联;

方案三:新增两个元件,其中一个和元件 A 并联,另一个和元件 B 并联,再将两者串联.

则该公司应选择哪一个方案,可以使部件 G 正常工作的概率达到最大?

22. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上一点 D 到焦点 F 的距离为 3,点 D 到 y 轴的距离恰为 p.

(Ⅰ)求点 D 的坐标;

(Ⅱ)过点 $M(5,-2)$ 的直线与抛物线相交于 A,B 两点,抛物线上是否存在一定点 P,使得点 P 始终在以线段 AB 为直径的圆上?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

2023～2024 **学年度上期期末高二年级调研考试**

数学参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、单选题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. D； 2. A； 3. B； 4. C； 5. A； 6. B； 7. D； 8. C.

二、多选题:(每小题 5 分,共 20 分)

9. AD； 10. ABC； 11. ABD； 12. BCD.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 8；　14. $\frac{\pi}{4}$；　15. $\frac{3}{4}$；　16. $\frac{2}{3}$.

四、解答题:(共 70 分)

17. **解:**(Ⅰ)由 $0.2\times(0.5+0.75+a+1+0.5+0.25)=1$,解得 $a=2$. ……3 分

因为$(0.5+0.75)\times0.2=0.25<0.5$,$(0.5+0.75+2)\times0.2=0.65>0.5$,

所以中位数位于$[0.4,0.6)$.

所以中位数为:$0.4+\frac{0.5-0.25}{2\times0.2}\times0.2=0.525$. ……6 分

(Ⅱ)由题意,抽取的 100 条鱼测量指标超过 1ppm 的频率为 $0.25\times0.2=0.05$.

……8 分

由样本的频率分布,估计 10000 条鱼中不符合可食用标准有 $10000\times0.05=500$(条).

所以用样本估计总体,这一批鱼中约有 500 条不符合可食用标准. ……10 分

18. **解:**(Ⅰ)设$\triangle AOB$ 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

∵A,B,O 均在圆 C 上.

$$\therefore\begin{cases}4+16+2D+4E+F=0,\\1+1-D+E+F=0,\\F=0.\end{cases}$$ ……3 分

解得$\begin{cases}D=-2,\\E=-4,\\F=0.\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x-4y=0$. ……5 分

所以圆 C 的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=5$. ……6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知圆心 $C(1,2)$,半径为$\sqrt{5}$,因为直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $3\sqrt{2}$,

所以点 C 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{5-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……8 分

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx$,

则$\frac{|k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,两边同时平方得$\frac{k^2-4k+4}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,解得 $k=1$ 或 $k=7$. ……11 分

当直线 l 的斜率不存在时,不满足条件.

所以直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $7x-y=0$. ……12 分

19.**解**:(Ⅰ)∵$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

∴D 是 CC_1 的中点,E 是 BC 靠近 C 的三等分点. ……3 分

如图所示,过点 D 作 $DM//AC$ 交 AA_1 于 M,过点 E 作 $EN//AC$ 交 AB 于 N,连接 MN.

则 $DM=\frac{2}{3}AC=EN$,$DM//EN$,

∴四边形 $DMNE$ 是平行四边形.

∴$DE//MN$. ……5 分

∵$MN\subset$平面 ABB_1A_1, $DE\not\subset$ 平面 ABB_1A_1,

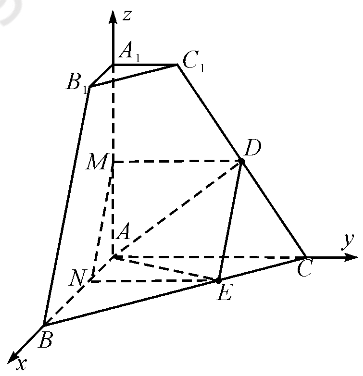
∴$DE//$平面 ABB_1A_1. ……6 分

(Ⅱ) ∵ $AA_1\perp$平面 ABC,

∴ $AA_1\perp AB$,$AA_1\perp AC$.

又因为 $AB\perp AC$,所以 AB,AC,AA_1 两两互相垂直.

以 A 为坐标原点,AB,AC,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $Axyz$.



则 $A(0,0,0)$,$C(0,3,0)$,$D(0,2,\frac{3}{2})$,$E(1,2,0)$,

$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2,\frac{3}{2})$,$\overrightarrow{AE}=(1,2,0)$.

……8 分

取平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$. ……9 分

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,平面 ABB_1A_1 与平面 ADE 的夹角为 θ,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y+\frac{3}{2}z=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$

令 $z=4$,得 $\boldsymbol{m}=(6,-3,4)$. ……11 分

∴ $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\left|\frac{-9}{3\cdot\sqrt{61}}\right|=\frac{3\sqrt{61}}{61}$.

所以，平面 ABB_1A_1 与平面 ADE 的夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{61}}{61}$. ……12 分

20. **解**：(Ⅰ)设点 $M(x,y)$，由题意可得：$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|4-x|}=\frac{1}{2}$， ……2 分

将上式两边平方，并化简，得 $3x^2+4y^2=12$，即$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

故点 M 的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(Ⅱ)当直线 l 斜率为 0 时，由题有 $|AB|=4$，$|PF_2|=3$，不合题意. ……5 分

当直线 l 斜率不为 0 时，设 $l:x=my+1(m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $P(4,\frac{3}{m})$，

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x，得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$.

$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. ……7 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{144(m^2+1)}}{3m^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$.

$|PF_2|=\sqrt{1+m^2}\,|y_P|=\frac{3\sqrt{m^2+1}}{|m|}$. ……9 分

$\therefore \frac{|AB|}{|PF_2|}=\frac{4|m|\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

化简得 $31m^4+m^2-32=0$， ……10 分

解得 $m^2=1$ 或 $m^2=-\frac{32}{31}$(舍去).

解得 $m=\pm1$.

所以，直线 l 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)记事件 A_1，B_1 分别表示元件 A，B 正常工作，则 $P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(B_1)=\frac{4}{5}$，

……2 分

事件 E 表示 G 正常工作，由元件 A，B 工作是相互独立的.

则 $P(E)=P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$. ……4 分

(Ⅱ)设方案一、二、三正常工作的概率分别为 P_1，P_2，P_3，设新增的两个元件为元件 C，D，记事件 C_1，D_1 分别表示新增的两个元件正常工作，则 $P(C_1)=P(D_1)=p$.

事件 $\overline{A}_1$，$\overline{B}_1$，$\overline{C}_1$，$\overline{D}_1$ 分别表示元件 A，B，C，D 不正常工作，由于四个元件工作相互独立，则 $P_1=P[(A_1\cup C_1\cup D_1)B_1]=P(A_1\cup C_1\cup D_1)P(B_1)$

$=[1-P(\bar{A}_1\bar{C}_1\bar{D}_1)]P(B_1)=[1-P(\bar{A}_1)P(\bar{C}_1)P(\bar{D}_1)]P(B_1)$.

所以 $P_1=\left[1-\frac{1}{3}\times(1-p)^2\right]\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}-\frac{4}{15}(1-p)^2$；　　……6 分

同理得：$P_2=\frac{2}{3}\times[1-\frac{1}{5}(1-p)^2]=\frac{2}{3}-\frac{2}{15}(1-p)^2$；　　……8 分

$P_3=[1-\frac{1}{3}(1-p)]\times[1-\frac{1}{5}(1-p)]=\frac{1}{15}(p+2)(p+4)$.　　……10 分

又因为 $0.8\leqslant p<1$，$P_1-P_2=\frac{2}{15}-\frac{2}{15}(1-p)^2>0$，

$P_1-P_3=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{15}p=\frac{1}{15}p(-5p+2)<0$，

所以选择方案三可以使部件 G 正常工作的概率最大.　　……12 分

22. **解**：(Ⅰ)设 $D(x_0,y_0)$，焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，由题可知 $\begin{cases}x_0+\frac{p}{2}=3,\\ x_0=p\end{cases}$，　　……2 分

解得 $x_0=p=2$，所以 $y_0^2=8$，所以点 D 的坐标为 $(2,\pm2\sqrt{2})$.　　……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知抛物线的方程为 $y^2=4x$，设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，$P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，

因为直线 AB 的倾斜角不为 0，设直线 AB 的方程为：$x-5=t(y+2)$，

由 $\begin{cases}x-5=t(y+2)\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4ty-(8t+20)=0$.

$\Delta=16t^2+4(8t+20)=16(t^2+2t+5)>0$

则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-(8t+20)$.　　……6 分

由以线段 AB 为直径的圆与该抛物线交于点 $P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，

当 P 与 A,B 之一重合时，满足题意；

当 P 与 A,B 均不重合时，则 PA,PB 的斜率均存在，记为 k_1,k_2，且满足 $k_1\cdot k_2=-1$.

$k_1=\dfrac{y_1-y_0}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_0^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_0}$，同理 $k_2=\dfrac{4}{y_2+y_0}$，　　……8 分

所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{4}{y_1+y_0}\cdot\dfrac{4}{y_2+y_0}=\dfrac{16}{y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2}=-1$.

即 $y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2+16=0$.　　……10 分

又因为 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-(8t+20)$，

所以 $-8t-20+4ty_0+y_0^2+16=0$. 整理得：$4t(y_0-2)+y_0^2-4=0$.

当 $y_0=2$ 时，上式恒成立，P 为定点.

所以存在抛物线上的定点 $P(1,2)$ 始终在以线段 AB 为直径的圆上.　　……12 分