绵阳市高中2021级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

BACDC　BACAD　AB

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　14. $-\frac{1}{2}$　15. $\frac{1}{2}$　16. $\sqrt{2}x \pm y = 0$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17. 解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差是d，

则$\begin{cases} 5a_1 + \frac{5\times 4}{2}d = 45 \\ 6a_1 + \frac{6\times 5}{2}d = 60 \end{cases}$，……3分

解得$\begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 5 \end{cases}$，……4分

$\therefore a_n = 2n+3$；……6分

（2）$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5})$，……8分

$\therefore T_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5})$……10分

$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+10} = \frac{n}{10n+25}$.……12分

18. 解：（1）$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，……2分

$= \frac{100(20\times 20 - 30\times 30)^2}{60\times 40\times 50\times 50}$=4>3.841……4分

故有95%的把握认为喜欢旅游与性别有关；……5分

（2）按分层抽样喜欢旅游的男性为2人，记为A_1，A_2，女性为3人，记为B_1，B_2，B_3，……6分

随机抽取2人的事件有：(A_1, A_2)，(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3)，(B_1, B_2)，(B_1, B_3)，(B_2, B_3)，……8分

不同性别的事件为:

(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3)，…10 分

故两人是不同性别的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．……12 分

19. **解**:（1）$\because 4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3bc\cdot\sin A$

$\therefore 4a\cdot\cos B=3b\cdot\sin A$……2 分

$\therefore 4\sin A\cos B=3\sin B\sin A$，……3 分

$\therefore \tan B=\frac{4}{3}$，则 $\cos B=\frac{3}{5}$，……4 分

又$\because 4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24c$，

$\therefore 4ac\cos B=24c$，……5 分

$\therefore a\cos B=6$，

$\therefore a=\frac{6}{\cos B}=6\times\frac{5}{3}=10$；……6 分

（2）由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，……7 分

$\therefore b^2=100+c^2-12c$，……8 分

又 $a+b+c=48$，则 $b+c=38$，……9 分

$\therefore (38-c)^2=100+c^2-12c$，……10 分

$\therefore c=21$，……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot sinB=\frac{1}{2}\times10\times21\times\frac{4}{5}=84$．……12 分

20. **解**:（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2=2py \end{cases}$，消 y 整理得：$x^2-2pkx+4p=0$，……2 分

所以：$x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=4p$，……3 分

$$k_{FA}k_{FB}=\frac{y_1-\frac{p}{2}}{x_1}+\frac{y_2-\frac{p}{2}}{x_2}=\frac{kx_1-(2+\frac{p}{2})}{x_1}+\frac{kx_2-(2+\frac{p}{2})}{x_2}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-(2+\frac{p}{2})(x_1+x_2)}{x_1x_2}$$

$=2k-\frac{k}{2}(2+\frac{p}{2})=k(1-\frac{p}{4})=0$，……………………………………4 分

$\therefore p=4$，即抛物线 E 的方程为：$x^2=8y$；……………………………………5 分

（2）由（1）可知：$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=16$……………………………………6 分

且 $\Delta=64k^2-64>0$，所以：$k^2>1$，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\sqrt{k^2-1}$，……………………………………7 分

直线 FA 的方程为：$y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$，所以：$x_M=\frac{4x_1}{2-y_1}=\frac{4x_1}{4-kx_1}$，……8 分

同理：$x_N=\frac{4x_2}{2-y_2}=\frac{4x_2}{4-kx_2}$，

所以 $|MN|=|x_M-x_N|=|\frac{4x_1}{4-kx_1}-\frac{4x_2}{4-kx_2}|$……………………………………9 分

$=|\frac{16(x_1-x_2)}{16-4k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}|$……………………………………10 分

$=\frac{8\sqrt{k^2-1}}{|1-k^2|}=\frac{8}{\sqrt{k^2-1}}\geq16$……………………………………11 分

解得：$-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq k<-1$ 或 $1<k\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$．……………………………………12 分

21．**解**：（1）$f'(x)=2\cos x-2ax+3$，……………………………………1 分

$\therefore f'(0)=2\cos0+3=5$，……………………………………2 分

切线斜率为 5，……………………………………3 分

曲线 $f(x)$ 在 x=0 处的切线方程为 y=5x．……………………………………4 分

（2）**解法一**：①当 $x\in[0,\pi]$ 时 $f'(x)=2\cos x-2ax+3$，……………………5 分

若 $a<0$ 时，$2\cos x>2ax-3$ 恒成立，

若 $a\geq0$ 时 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减．……………………………………6 分

$\therefore f'(x) \geq f'(\pi) = -2 - 2a\pi + 3 \geq 0$，则 $0 \leq a \leq \dfrac{1}{2\pi}$，……7分

综上：$a \leq \dfrac{1}{2\pi}$；……8分

②当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ 时

若 $a \geq 0$ 时，$2\cos x > 2ax - 3$ 恒成立，

$\therefore f'(x) \geq 0$ 恒成立，……9分

若 $a < 0$ 时 $f'(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ 上单调递增.

$\therefore f'(x) \geq f'(-\dfrac{\pi}{2}) = a\pi + 3 \geq 0$，则 $-\dfrac{3}{\pi} \leq a < 0$，……10分

$\therefore a \geq -\dfrac{3}{\pi}$，……11分

综上所述：$-\dfrac{3}{\pi} \leq a \leq \dfrac{1}{2\pi}$.……12分

解法二： 由（1）可知 $f'(0) = 2 + 3 = 5 > 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 上必是单调递增函数，……5分

令 $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$，

则 $f'(-\dfrac{\pi}{2}) = a\pi + 3 \geqslant 0$，$f'(\pi) = 1 - 2a\pi \geqslant 0$，……6分

$\therefore -\dfrac{3}{\pi} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 为 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 上是增函数成立的必要条件，……7分

令 $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$，

下证：当 $-\dfrac{3}{\pi} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 时，$f'(x) \geqslant 0$ 对任意 $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 恒成立，……8分

①当 $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 时，$x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$，则 $ax \in [-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}]$，$-2ax \in [-1, \dfrac{1}{2}]$，

$\therefore f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3 \geqslant 1 - 2ax \geqslant 0$；……9分

②当 $-\dfrac{3}{\pi} \leqslant a < 0$ 时，

$x \in [0, \pi]$，$-2ax > 0$，很显然 $f'(x) > 2\cos x + 3 > 0$；

$x\in[-\frac{\pi}{2},0]$，$f'(x)$为增函数，$f'(x)\geqslant f'(-\frac{\pi}{2})\geqslant a\pi+3\geqslant 0$；…………10 分

$\therefore$当$-\frac{3}{\pi}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2\pi}$时，$g(x)\geqslant 0$对任意$x\in[-\frac{\pi}{2},\pi]$恒成立，…………11 分

$\therefore -\frac{3}{\pi}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2\pi}$，使得$f(x)$在$[-\frac{\pi}{2},\pi]$上是单调函数．…………12 分

22.（1）由题意：$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{2})^2=1-t^2+t^2=1$，且$x=3\sqrt{1-t^2}\geq 0$，…………2 分

$\therefore$曲线 C 的普通方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geq 0)$…………3 分

$\therefore$曲线 C 的极坐标方程为$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{9}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$（$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$），

即$\rho^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$（$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$）；…………5 分

（2）由（1）得$\rho^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$，

因为且$OA\perp OB$，不妨设$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，…………6 分

$\therefore \rho_1{}^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$，…………7 分

$\therefore \rho_2{}^2=\frac{36}{4+5\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})^2}=\frac{36}{4+5\cos^2\theta}$，…………8 分

$\therefore \frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{\rho_2{}^2}+\frac{1}{\rho_2{}^2}$…………9 分

$=\frac{4+5\sin^2\theta+4+5\cos^2\theta}{36}=\frac{8+5}{36}=\frac{13}{36}$．…………10 分

23.（1）证明：因为$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(ax^2+by^2)=x^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{by^2}{a}+y^2$

$\geq x^2+y^2+2\sqrt{\frac{ax^2}{b}\cdot\frac{by^2}{a}}=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$，…………3 分

$\therefore \frac{(x+y)^2}{ax^2+by^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，…………4 分

当且仅当 $\frac{ax^2}{b}=\frac{by^2}{a}$，即 $ax=by$ 时，等号成立；……5 分

（2）函数 $f(x)=\frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}=\frac{(2x+1)^2}{5x^2+4x+2}=\frac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}$ ……7 分

根据（1）的结论，$\frac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，……8 分

当且仅当 $3x=2(x+1)$，即 $x=2$ 时，等号成立．……9 分

∴函数 $f(x)=\frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}(x>0)$ 的最大值为 $\frac{5}{6}$，此时 x=2．……10 分