秘密★启用前【考试时间：2024年1月13日15：00—17：00】

绵阳市高中2021级第二次诊断性考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若 $iz=1+i$，则复数 $z=$

A．$1-i$　　B．$1+i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

2．已知 $A=\{x|2^x<3\}$，$B=\{x|x<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty，2)$　　B．$(-\infty，\log_2 3)$　　C．$(0，\log_2 3)$　　D．$(\log_2 3，2)$

3．已知 $a=(1，0)$，$|b|=1$，$|a-b|=\sqrt{3}$，则 a 与 $a-b$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

4．若变量 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ 2x+y-2\leqslant 0, \\ x-y+2\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x-y$ 的最小值是

A．1　　B．-1　　C．-2　　D．-3

5．已知变量 x，y 之间的线性回归方程为 $\hat{y}=2x+1$，且变量 x，y 之间的一组相关数据如表所示，

x	2	4	6	8
y	5	8.2	13	m

则下列说法正确的是

A．$m=17$　　B．变量 y 与 x 是负相关关系

C．该回归直线必过点(5，11)　　D．x 增加1个单位，y 一定增加2个单位

6．$(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^5$的展开式中，x的系数为

A．-5　　B．-10　　C．5　　D．10

7．已知$x>0$，$y>0$，则“$x+y\geqslant1$”是“$x^2+y^2\geqslant1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．函数$y=f(x-1)$关于直线$x=1$对称，且$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，则

A．$f(0.2^{-0.3})>f(-0.5)>f(\log_3 0.5)$　　B．$f(-0.5)>f(\log_3 0.5)>f(0.2^{-0.3})$

C．$f(\log_3 0.5)>f(-0.5)>f(0.2^{-0.3})$　　D．$f(0.2^{-0.3})>f(\log_3 0.5)>f(-0.5)$

9．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{3^n-2}{3^n}$，则下列说法正确的是

A．$a_n<a_{n+1}$　　B．$S_n>S_{n+1}$

C．$2a_n+S_n=1$　　D．$0<a_n\leqslant\frac{4}{9}$

10．在平面直角坐标系xOy中，角α，β的终边与单位圆的交点分别于A，B两点，且直线AB的斜率为$-\frac{1}{2}$，则$\tan(\alpha+\beta)=$

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{4}{3}$　　D．$-\frac{3}{4}$

11．已知曲线$y=x^2-2mx+m-1$与x轴交于不同的两点A，B，与y轴交于点C，则过A，B，C（A，B，C均不重合）三点的圆的半径不可能为

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C．1　　D．2

12．设F_1，F_2分别为椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，以$F_1$为圆心且过$F_2$的圆与$x$轴交于另一点$P$，与$y$轴交于点$Q$，线段$QF_2$与$C$交于点$A$．已知$\triangle APF_2$与$\triangle QF_1F_2$的面积之比为3：2，则该椭圆的离心率为

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\sqrt{13}-3$　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、已知 α 为锐角，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=$__________.

14、甲、乙二人用 7 张不同的扑克牌（其中红桃 4 张，方片 3 张）玩游戏．他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放回，各抽一张．则甲、乙二人抽到花色相同的概率为__________.

15、已知 $f(x)=(x+a+b)\ln(1+\frac{1}{x+b})$，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $a=$__________.

16、已知 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$分别是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左，右焦点，过点 F_2 作 E 的渐近线的垂线，垂足为 P．点 M 在 E 的左支上，当 $PM//x$ 轴时，$|PM|=c$，则 E 的渐近线方程为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=45$，$S_6=60$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n.

18．（12 分）

绵阳市 37 家 A 级旅游景区，在 2023 年国庆中秋双节期间，接待人数和门票收入大幅增长．绵阳某旅行社随机调查了市区 100 位市民平时外出旅游情况，得到的数据如下表：

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

（1）能否有 95%的把握认为喜欢旅游与性别有关？

（2）将频率视为概率，从全市男性市民中随机抽取 2 人进行访谈，记这 2 人中喜欢旅游的人数为 ξ，求 ξ 的分布列与数学期望．

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19．（12分）

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a(b\cos C-c\cos B)=c^2$．

（1）求证：$b^2=2c^2$；

（2）若$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c$，$b\sin A=\sqrt{2}$，求$b$．

20．（12分）

已知直线l：$y=kx-2$与抛物线E：$x^2=2py\ (p>0)$交于A，B两点，F为E的焦点，直线FA，FB的斜率之和为0．

（1）求E的方程；

（2）直线FA，FB分别交直线$y=-2$于M，N两点，若$|MN|\geqslant 16$，求k的取值范围．

21．（12分）

函数$f(x)=\dfrac{x^2+a(x-1)}{e^x}$．

（1）已知$f(x)$在$[0，+\infty)$上存在零点，求实数a的取值范围；

（2）若$f(x)$在定义域上是单调函数，x_1，x_2满足$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2}{e}$，证明：$x_1+x_2\geqslant 2$．

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在平面直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=3\sqrt{1-t^2}\\ y=2t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，以$x$轴正半轴为极轴，建立极坐标系．

（1）求曲线C极坐标方程；

（2）若A，B为曲线C上的动点，且$OA\perp OB$，求$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$的值．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

（1）已知a，b，x，y均为正数，求证：$\dfrac{(x+y)^2}{ax^2+by^2}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，并指出等号成立的条件；

（2）利用（1）的结论，求函数$f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}\ (x>0)$的最大值，并指出取最大值时$x$的值．