

秘密 ★ 启用前 【考试时间：2024 年 1 月 13 日 15: 00—17: 00】

## 绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

# 文科数学

### 注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 若  $iz = 1 + i$ ，则复数  $z =$ 
  - $1 + i$
  - $1 - i$
  - $-1 + i$
  - $-1 - i$
- 已知  $A = \{x | x^2 - x < 0\}$ ， $B = \{x | x < 2\}$ ，则  $A \cap B =$ 
  - $(0, 1)$
  - $(0, 2)$
  - $(1, 2)$
  - $(-\infty, 2)$
- 已知  $a = (1, 0)$ ， $|b| = 1$ ， $|a - b| = \sqrt{3}$ ，则  $a$  与  $b$  的夹角为
  - $\frac{\pi}{6}$
  - $\frac{\pi}{3}$
  - $\frac{2\pi}{3}$
  - $\frac{5\pi}{6}$
- 若变量  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + y - 2 \leq 0, \end{cases}$  则  $x + y$  的最大值是
  - 1
  - 0
  - 1
  - 2
- 已知变量  $x, y$  之间的线性回归方程为  $\hat{y} = 2x + 1$ ，且变量  $x, y$  之间的一组相关数据如表所示，

$x$	2	4	6	8
$y$	5	8.2	13	$m$

则下列说法正确的是

- $m = 17$
- 变量  $y$  与  $x$  是负相关关系
- 该回归直线必过点  $(5, 11)$
- $x$  增加 1 个单位， $y$  一定增加 2 个单位

6. 已知  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数，则

- A.  $f(0.2^{-0.3}) > f(\log_3 2) > f(0.5)$       B.  $f(0.5) > f(\log_3 2) > f(0.2^{-0.3})$   
 C.  $f(\log_3 2) > f(0.5) > f(0.2^{-0.3})$       D.  $f(0.2^{-0.3}) > f(0.5) > f(\log_3 2)$

7. 已知  $x > 0, y > 0$ ，则 “ $x + y \leq 1$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \leq 1$ ” 的

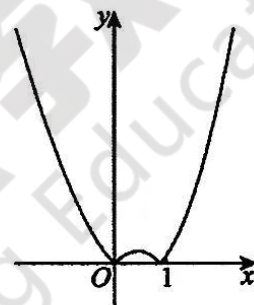
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

8. 已知角  $\alpha$  的终边与角  $\beta$  的终边关于  $y=x$  对称 ( $\beta$  为象限角)，则  $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\beta} =$

- A. -1      B. 0      C. 1      D. 2

9. 如右图是  $y = f(x)$  的大致图象，则  $f(x)$  的解析式可能为

- A.  $f(x) = |x^2 - \sin x|$   
 B.  $f(x) = |x - \sin x|$   
 C.  $f(x) = |2^x - 1|$   
 D.  $f(x) = |x^2 - x - \frac{1}{4}|$



10. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_n = \frac{3^n - 2}{3^n}$ ，则下列说法正确的是

- A.  $a_n < a_{n+1}$       B.  $S_n > S_{n+1}$   
 C.  $a_n + 2S_n = 1$       D.  $0 < a_n \leq \frac{4}{9}$

11. 已知曲线  $y = x^2 - 2mx + m - 1$  与  $x$  轴交于不同的两点  $A, B$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，则过  $A, B, C$  三点的圆的圆心轨迹为

- A. 直线      B. 圆  
 C. 椭圆      D. 双曲线

12. 设  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点，以  $F_1$  为圆心且过  $F_2$  的

圆与  $x$  轴交于另一点  $P$ ，与  $y$  轴交于点  $Q$ ，线段  $QF_2$  与  $C$  交于点  $A$ 。已知  $\triangle APF_2$  与  $\triangle QF_1F_2$  的面积之比为 3:2，则该椭圆的离心率为

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\sqrt{13} - 3$       C.  $\sqrt{3} - 1$       D.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $\alpha$  为锐角， $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ，则  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ \_\_\_\_\_.

14. 若  $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x+b})$  为奇函数，则  $b =$ \_\_\_\_\_.

15. 甲、乙二人用 4 张不同的扑克牌（其中红桃 3 张，方片 1 张）玩游戏，他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放入，各抽一张，则甲、乙二人抽到的花色相同的概率为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  分别是双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点，过  $F_2$  作  $E$  的渐近线的垂线，垂足为  $P$ . 点  $M$  在  $E$  的左支上，当  $PM \parallel x$  轴时， $|PM| = c$ ，则  $E$  的渐近线方程为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_5 = 45$ ， $S_6 = 60$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

18. (12 分)

绵阳市 37 家 A 级旅游景区，在 2023 年国庆中秋双节期间，接待人数和门票收入大幅增长。绵阳某旅行社随机调查了市区 100 位市民平时外出旅游情况，得到的数据如下表：

(1) 能否有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关？

(2) 在以上所调查的喜欢旅游的市民中，按性别进行分层抽样随机抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人进行访谈，求这两人是不同性别的概率。

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

$$\text{附：} K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 且 $4\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3bc \sin A = 24c$ .

- (1) 求 $\tan B$ 及 $a$ ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 周长为48, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12分)

已知直线 $l: y = kx - 2$ 与抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 $A, B$ 两点,  $F$ 为 $E$ 的焦点, 直线 $FA, FB$ 的斜率之和为0.

- (1) 求 $E$ 的方程;
- (2) 直线 $FA, FB$ 分别交直线 $y = -2$ 于 $M, N$ 两点, 若 $|MN| \geq 16$ , 求 $k$ 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - ax^2 + 3x$ .

- (1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上是单调函数, 求实数 $a$ 的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题做答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\sqrt{1-t^2} \\ y = 2t \end{cases}$  ( $t$ 为参数), 以坐标原点 $O$ 为极点, 以 $x$ 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系.

- (1) 求曲线 $C$ 极坐标方程;
- (2) 若 $A, B$ 为曲线 $C$ 上的动点, 且 $OA \perp OB$ , 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. [选修4—5: 不等式选讲] (10分)

- (1) 已知 $a, b, x, y$ 均为正数, 求证:  $\frac{(x+y)^2}{ax^2+by^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , 并指出等号成立的条件;
- (2) 利用(1)的结论, 求函数 $f(x) = \frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2} (x > 0)$ 的最大值, 并指出取最大值时 $x$ 的值.