德阳市高中2021级第一次诊断考试

数学参考答案与评分标准

（理科）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	A	B	A	D	B	B	D	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 1　　14. $\frac{7}{3}$　　15. 9　　16. $5\sqrt{2}$.

三、解答题

17. 解：(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$-S_2, S_4, 3S_3$成等差数列

所以$2S_4=-S_2+3S_3$即$2(S_4-S_3)=S_3-S_2$.

即$2a_4=a_3$.

所以$q=\frac{1}{2}$ ………………………………………………………… 5分

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^n}$ ……………………………………… 6分

(2) 由(1)知：$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$ ……………………………………… 7分

所以$S_n+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{2^n}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^n}}=2+\dfrac{1}{2^n(2^n-1)}(n\in N^*)$

$\therefore S_n+\frac{1}{S_n}$随$n$的增大而减小

$\therefore$ 当$n=1$时，$S_n+\frac{1}{S_n}$取得最大值$\frac{5}{2}$

∴ 数列 $S_n+\frac{1}{S_n}\}$ 的最大项为$\frac{5}{2}$. ………………………………………… 12 分

18. 解:(1) 在 $\triangle ABC$ 中,由于 $5\sin C=7\sin A$

所以 $5c=7a$,结合题意得:$b=6$.

故 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 5,6,7 ………………………………………… 2 分

所以 $\cos C=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\times6\times5}=\frac{1}{5}$ ………………………………………… 4 分

在 $\triangle BCD$ 中,$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=28$,故 $BD=2\sqrt{7}$.

………………………………………… 6 分

(2) 由题意知:$c>b>a$ 且 $b>2$. 要使 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,只要 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

故 $\cos C=\frac{(b-1)^2+b^2-(b+1)^2}{2\times b\times(b-1)}>0$ 解得:$b>4$ ………………………… 8 分

又 $\cos B=\frac{(b-1)^2+(b+1)^2-b^2}{2\times(b+1)\times(b-1)}=\frac{b^2+2}{2(b^2-1)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{b^2-1}$

由 $b>4$,所以$\frac{1}{2}<\cos B<\frac{3}{5}$.

故 $\cos B$ 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$. ………………………………………… 12 分

19. 解:(1) 因为 $f'(x)=3x^2-a$,当 $a\leqslant0$ 时,显然 $f'(x)\geqslant0$,即 $f(x)$ 单调递增;…

………………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$ 得 $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ … 2 分

所以,$f(x)$ 的单调增区间为区间$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$,$\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$;单调减区间

为$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

综上,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)$ 的增区间为$(-\infty,+\infty)$;当 $a>0$ 时,$f(x)$ 的单调增

区间为$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$,$\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$;单调减区间为$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$. ……

………………………………………… 5 分

(2) 由(1) 知 $a>0$ 且 $x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}$.

由 $f(x_0)=f(x_1)$ 得：$x_0^3-ax_0-a=x_1^3-ax_1-a$

所以 $x_0^3-x_1^3-ax_0+ax_1=0$ 即 $(x_0-x_1)(x_0^2+x_0x_1+x_1^2-a)=0$ ……

………………………………………………………………………… 6 分

因为 $x_1\neq x_0$，故 $x_0^2+x_0x_1+x_1^2-a=0$

又 $x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}$，所以 $x_1^2+x_0x_1-2x_0^2=0$

故 $x_1=-2x_0$ 或 $x_1=x_0$（舍） ………………………………………… 8 分

所以 $x_1-x_0=-3x_0=-3\sqrt{\frac{a}{3}}=-\sqrt{3a}$ ……………………………… 9 分

故 $f(x_1-x_0)=f(-\sqrt{3a})=(-\sqrt{3a})^3-a(-\sqrt{3a})-a$

令 $t=-\sqrt{3a}$，$t<0$ ……………………………………………………… 10 分

上式为 $g(t)=t^3-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{3}=\frac{2t^3}{3}-\frac{t^2}{3}$，$(t<0)$.

因为 $g'(t)=2t^2-\frac{2}{3}t$，$(t<0)$ 知 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增，故 $g(t)<0$.

即 $f(x_1-x_0)$ 的取值范围为 $(-\infty,0)$. ………………………………… 12 分

20. 解：(1) 由 $P(A\mid\overline{B})=\frac{3}{5}$ 知 50 名女生中了解人工智能的有 30 人

由 $P(B\mid A)=\frac{4}{7}$ 知了解人工智能的学生中男生占 $\frac{4}{7}$ ……………………… 2 分

所以列联表为

	了解人工智能	不了解人工智能	合计
男生	40	10	50
女生	30	20	50
合计	70	30	100

所以 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(40\times20-30\times10)^2}{70\times30\times50\times50}\approx4.76$

<6.635 …………………………………………………………………… 5 分

故没有 99% 把握推断该校学生对人工智能的了解情况与性别有关. …… 6 分

(2) 由(1) 知该校学生中了解人工智能的概率为 0.7 ……………………… 7 分

所以 $X \sim B(30,0.7)$

故 $P(X=k)=C_{30}^{k}0.7^{k}\times 0.3^{30-k}$ ………………………………………………… 8分

令 $P(X=k)\geqslant P(X=k+1)$ 有 $C_{30}^{k}0.7^{k}\times 0.3^{30-k}\geqslant C_{30}^{k+1}0.7^{k+1}\times 0.3^{29-k}$

……………………………………………………………………………… 9分

所以$\dfrac{30!}{k!\times(30-k)!}\times 0.7^{k}\times 0.3^{30-k}\geqslant\dfrac{30!}{(k+1)!\times(29-k)!}\times 0.7^{k+1}\times 0.3^{29-k}$.

即$\dfrac{0.3}{30-k}\geqslant\dfrac{0.7}{k+1}$解得 $k\geqslant 20.7$.

$\therefore 1\leqslant k\leqslant 20$ 时,$P(X=k)<P(X=k+1)$,

$k\geqslant 21$ 时,$P(X=k)>P(X=k+1)$

即 $P(X=1)<P(X=2)<\cdots<P(X=20)<P(X=21)>P(X=22)>\cdots>P(X=30)$ ……………………………………………… 11分

所以 $P(X=k)$ 取得最大值时的 k 的值为 21. …………………………………… 12分

21. 解:(1) 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{ae^x-axe^x}{}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a-ax}{e^x}$

依题意 $f'(-1)=0$,解得:$a=-\dfrac{1}{2e}$ ……………………………………………… 1分

当 $a=-\dfrac{1}{2e}$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2e}\cdot\dfrac{x-1}{e^x}$

令 $g(x)=\dfrac{1}{2e}\cdot\dfrac{x-1}{e^x}$,那么 $g'(x)=\dfrac{1}{2e}\cdot\dfrac{2-x}{e^x}$,故 $g(x)$ 在$(-\infty,0)$ 上单增.

当 $x<-1$ 时,有$\dfrac{1}{x^2}\in(0,1)$,$g(x)<g(-1)=-1$.

所以当 $x<-1$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2e}\cdot\dfrac{x-1}{e^x}<0$ ………………………… 3分

当 $-1<x<0$ 时,有$\dfrac{1}{x^2}\in(1,+\infty)$,$g(x)>g(-1)=-1$.

所以当 $-1<x<0$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2e}\cdot\dfrac{x-1}{e^x}>0$ ……………………… 5分

综上,若 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,$a=-\dfrac{1}{2e}$ ……………………………… 6分

(2) 函数 $f(x)$ 恰有一个零点 $\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}+\frac{ax}{e^x}=0$ 只有一根 $\Leftrightarrow a=\frac{(1-x)e^x}{x^2}$ 只有一根 ………………………………………………………………………………………… 7 分

令 $h(x)=\frac{(1-x)e^x}{x^2}(x\neq 0)$.

那么 $h'(x)=\frac{-(x^2-2x+2)e^x}{x^3}=-\frac{[(x-1)^2+1]e^x}{x^3}$ ……………… 8 分

所以当 $x<0$ 时, $h'(x)>0$; 当 $x>0$ 时, $h'(x)<0$.

即 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增, 在 $(0,+\infty)$ 单减.

当 $x<0$ 时, $x\to-\infty$ 时, $h(x)\to 0$, 且 $h(x)>0$; $x\to 0$ 时, $h(x)\to+\infty$.

当 $x>0$ 时, $x\to+\infty$ 时, $h(x)\to-\infty$; $x\to 0$ 时, $h(x)\to+\infty$ …… 11 分

故要使 $a=\frac{(1-x)e^x}{x^2}$ 只有一根, 只要 $a\leqslant 0$ 即可.

所以函数 $f(x)$ 恰有一个零点, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$. ……… 12 分

22. 解: (1) 依题意得: 动点 P 的轨迹 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta\\ y=2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

消去参数 θ 得轨迹 C 的普通方程: $x^2+(y-1)^2=1$. ………………………… 5 分

(2) 依题意得: 直线 l 所过两点的直角坐标为 $(-1,0)$ 及 $(1,1)$

所以直线 l 的直角坐标方程为: $x-2y+1=0$ ………………………………… 7 分

圆心到直线 l 的距离为 $\frac{|0-2\times 1+1|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

由垂径定理得直线 l 被 C 截得的线段的长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 10 分

23. (1) 证明: 因为 $abc=4>0$, 所以 a,b,c 只可能同正或者两负一正.

若 a,b,c 同正, 那么 $\begin{cases}a+b=2-c\\ ab=\frac{4}{c}\end{cases}$

由 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 得: $2-c\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{c}}=\frac{4}{\sqrt{c}}$ 即 $c+\frac{4}{\sqrt{c}}\leqslant 2$.

因为 $c+\frac{4}{\sqrt{c}}>c+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geqslant 3\sqrt[3]{c\times\frac{1}{\sqrt{c}}\times\frac{1}{\sqrt{c}}}=3$ 与 $c+\frac{4}{\sqrt{c}}\leqslant 2$ 矛盾.