德阳市高中2021级第一次诊断考试

数学参考答案与评分标准

（文科）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	A	B	A	D	B	B	D	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $\frac{8}{3}$　14. $\frac{7}{3}$　15. 9　16. $5\sqrt{2}$.

三、解答题

17. 解：(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$-S_2, S_4, 3S_3$成等差数列

所以$2S_4=-S_2+3S_3$即$2(S_4-S_3)=S_3-S_2$.

即$2a_4=a_3$.

所以$q=\frac{1}{2}$ …………………………………………………………… 5分

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^n}$ ……………………………………… 6分

(2) 由(1)知：$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$ ……………………………………… 7分

所以$S_n+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{2^n}+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^n}}=2+\dfrac{1}{2^n(2^n-1)}$.$(n\in N^*)$

$\therefore S_n+\frac{1}{S_n}$随$n$的增大而减小

$\therefore$ 当$n=1$时，$S_n+\frac{1}{S_n}$取得最大值$\frac{5}{2}$

∴ 数列$\left\{S_n+\frac{1}{S_n}\right\}$的最大项为$\frac{5}{2}$. ………………………………………… 12分

18. 解：(1) 在$\triangle ABC$中，由于$5\sin C=7\sin A$

所以$5c=7a$，结合题意得：$b=6$.

故$\triangle ABC$的三边长分别为5,6,7 ………………………………………… 2分

所以$\cos C=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\times6\times5}=\frac{1}{5}$ ………………………………………… 4分

在$\triangle BCD$中，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=28$，故$BD=2\sqrt{7}$.

………………………………………………………………………… 6分

(2) 由题意知：$c>b>a$且$b>2$. 要使$\triangle ABC$是锐角三角形，只要$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

故$\cos C=\frac{(b-1)^2+b^2-(b+1)^2}{2\times b\times(b-1)}>0$解得：$b>4$ ………………………… 8分

又$\cos B=\frac{(b-1)^2+(b+1)^2-b^2}{2\times(b+1)\times(b-1)}=\frac{b^2+2}{2(b^2-1)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{b^2-1}$

由$b>4$，所以$\frac{1}{2}<\cos B<\frac{3}{5}$.

故$\cos B$的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$. ………………………………………… 12分

19. 解：(1) 因为$f'(x)=3x^2-a$，当$a\leqslant0$时，显然$f'(x)\geqslant0$，即$f(x)$单调递增；…

………………………………………………………………………………… 1分

当$a>0$时，令$f'(x)>0$得$x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ … 2分

所以，$f(x)$的单调增区间为区间$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$；单调减区间

为$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

综上，当$a\leqslant0$时，$f(x)$的增区间为$(-\infty,+\infty)$；当$a>0$时，$f(x)$的单调增

区间为$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$；单调减区间为$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$. ……

……………………………………………………………………………… 5分

(2) 由(1)知$a>0$且$x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}$.

由 $f(x_0)=f(x_1)$ 得：$x_0^3-ax_0-a=x_1^3-ax_1-a$

所以 $x_0^3-x_1^3-ax_0+ax_1=0$ 即 $(x_0-x_1)(x_0^2+x_0x_1+x_1^2-a)=0$ ……

…………………………………………………………………… 6 分

因为 $x_1\neq x_0$，故 $x_0^2+x_0x_1+x_1^2-a=0$

又 $x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}$，所以 $x_1^2+x_0x_1-2x_0^2=0$

故 $x_1=-2x_0$ 或 $x_1=x_0$（舍） …………………………………………… 8 分

所以 $x_1-x_0=-3x_0=-3\sqrt{\frac{a}{3}}=-\sqrt{3a}$ …………………………………… 9 分

故 $f(x_1-x_0)=f(-\sqrt{3a})=(-\sqrt{3a})^3-a(-\sqrt{3a})-a$

令 $t=-\sqrt{3a}$，$t<0$ …………………………………………………………… 10 分

上式为 $g(t)=t^3-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{3}=\frac{2t^3}{3}-\frac{t^2}{3}$，$(t<0)$.

因为 $g'(t)=2t^2-\frac{2}{3}t$，$(t<0)$ 知 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增，故 $g(t)<0$.

即 $f(x_1-x_0)$ 的取值范围为 $(-\infty,0)$. ………………………………… 12 分

20.解：(1) 由女生中了解人工智能的占 $\frac{3}{5}$，知 50 名女生中了解人工智能的有 30 人，又了解人工智能的学生中男生占 $\frac{4}{7}$ …………………………………………… 2 分

所以列联表为

	了解人工智能	不了解人工智能	合计
男生	40	10	50
女生	30	20	50
合计	70	30	100

所以 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(40\times20-30\times10)^2}{70\times30\times50\times50}\approx4.76$

<6.635 …………………………………………………………………………… 5 分

故没有 99% 把握推断该校学生对人工智能的了解情况与性别有关. …… 6 分

(2) 分层抽样的方法从女生中抽取 5 人，所以 5 人中有 3 人了解人工智能。另外 2

人不了解人工智能…………………………………………………………………………… 8分

设了解人工智能的3位女生为 a、b、c，不了解人工智能的2为女生为1,2 …

…………………………………………………………………………………………… 9分

那么从5人中抽取3人的所有情况为 $abc,ab1,ab2,ac1,ac2,a12,bc1,bc2,b12,c12$ 共10种情况，其中至少有2人了解人工智能的有 $abc,ab1,ab2,ac1,ac2,bc1,bc2$ 共7种情况. ……………………………………………………… 11分

故抽取的3人中至少有2人了解人工智能的概率为 $\frac{7}{10}$. ……………… 12分

21. 解：(1) 因为 $f'(x)=-xe^x$，所以 $f'(1)=-e$.

故所求切线为 $y=g(x)=-ex+e-1$ ……………………………………… 2分

又 $f(x)-g(x)=e^x-xe^x-1-(-ex+e-1)=-(e^x-e)(x-1)$

当 $x\geqslant 1$ 时，$e^x-e\geqslant 0$，所以 $f(x)-g(x)\leqslant 0$；……………………… 3分

当 $x\leqslant 1$ 时，$e^x-e\leqslant 0$，所以 $f(x)-g(x)\leqslant 0$ ……………………… 4分

综上，$f(x)\leqslant g(x)$. …………………………………………………… 5分

(2) 因为 $h(x)=\ln x-x+1-e^x-f(x)=\ln x-x+(x-2)e^x+2$

所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-1+(x-1)e^x=\frac{(x-1)(xe^x-1)}{x}(x>0)$ ……… 7分

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $xe^x-1=0$ ………………………………… 8分

因为 $t(x)=xe^x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，$t\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{e}-1<0$，$t\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}-1>0$ ……………………………………………………………………… 9分

故 $t(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ 有根 t_0，可知 $h(x)$ 在 $(0,t_0)$ 上增，$(t_0,1)$ 上减，在 $(1,+\infty)$ 上增

所以，$h(x)$ 的极大值点为 $x_0=t_0$ 且 $x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ 且 $x_0e^{x_0}=1\Leftrightarrow \ln x_0+x_0=0$.

故 $h(x_0)=\ln x_0-x_0+(x_0-2)e^{x_0}+2=3-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，$x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

……………………………………………………………………………… 11分

所以 $h(x_0)\in\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$，故 $[h(x_0)]=-2$. ……………………………… 12分

22. 解：(1) 依题意得：动点 P 的轨迹 C 的参数方程为$\begin{cases} x=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta \\ y=2\sin^2\theta=1-\cos2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

消去参数 θ 得轨迹 C 的普通方程：$x^2+(y-1)^2=1$. …………………… 5 分

(2) 依题意得：直线 l 所过两点的直角坐标为 $(-1,0)$ 及 $(1,1)$

所以直线 l 的直角坐标方程为：$x-2y+1=0$ …………………… 7 分

圆心到直线 l 的距离为$\dfrac{|0-2\times1+1|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{\sqrt5}{5}$

由垂径定理得直线 l 被 C 截得的线段的长为$\dfrac{4\sqrt5}{5}$. …………………… 10 分

23. (1) 证明：因为 $abc=4>0$，所以 a,b,c 只可能同正或者两负一正.

若 a,b,c 同正，那么$\begin{cases} a+b=2-c \\ ab=\dfrac{4}{c} \end{cases}$

由 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$ 得：$2-c\geqslant2\sqrt{\dfrac{4}{c}}=\dfrac{4}{\sqrt c}$ 即 $c+\dfrac{4}{\sqrt c}\leqslant2$.

因为 $c+\dfrac{4}{\sqrt c}>c+\dfrac{1}{\sqrt c}+\dfrac{1}{\sqrt c}\geqslant3\sqrt[3]{c\times\dfrac{1}{\sqrt c}\times\dfrac{1}{\sqrt c}}=3$ 与 $c+\dfrac{4}{\sqrt c}\leqslant2$ 矛盾.

所以 a,b,c 不可能都是正实数. 只可能两负一正. …………………… 5 分

(2) 解：由(1)知 a,b,c 只可能两负一正，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，那么 $a<0,b<0,c>0$.

由$\begin{cases} a+b=2-c \\ ab=\dfrac{4}{c} \end{cases}$，且 $-a-b\geqslant2\sqrt{ab}$

故 $c-2\geqslant2\sqrt{\dfrac{4}{c}}=\dfrac{4}{\sqrt c}$ 即 $c-\dfrac{4}{\sqrt c}-2\geqslant0$.

令 $f(c)=c-\dfrac{4}{\sqrt c}-2$，显然 $f(4)=0$，$f(c)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，所以 $c\geqslant4$.

所以 $|a|+|b|+|c|=c-(a+b)=2c-2\geqslant6$.

当 $a=b=-1,c=4$ 时等号成立. …………………… 10 分