

德阳市高中 2021 级第一次诊断考试

数学试卷(理工农医类)

说明：

1. 本试卷分第 I 卷和第 II 卷，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试卷、草稿纸上答题无效。考试结束后，将答题卡交回。
2. 本试卷满分 150 分，120 分钟完卷。

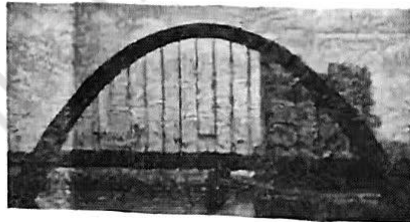
第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $B = \{x | x > a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是
 A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[5, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$

2. 设表示复数 z_1, z_2 的点在复平面内关于实轴对称, 且 $z_1 = 1 + i$, 下面关于复数 $z = \frac{-2}{z_2}$ 的四个命题中正确的是
 A. $|z| = 2$ B. $z^2 = 3i$
 C. z 的共轭复数为 $1 + i$ D. z 的虚部为

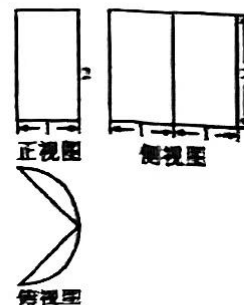
3. 数学与建筑的结合造就建筑艺术品, 位于德阳市区的彩虹桥是一抛物线形水泥建筑物(如图). 若将彩虹桥的轮廓(忽略水泥建筑的厚度)近似看成抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的一部分, 且点 $A(2, -2)$ 在该抛物线上, 则该抛物线的焦点坐标是



- | | |
|------------------------|------------------------|
| A. $(0, -\frac{1}{2})$ | B. $(0, -1)$ |
| C. $(0, -\frac{1}{4})$ | D. $(0, -\frac{1}{8})$ |

4. 已知 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为共面的三个单位向量, 且 $\vec{i} \perp \vec{j}$, 则 $(\vec{i} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} - \vec{k})$ 的取值范围是
 A. $[-3, 3]$ B. $[-2, 2]$
 C. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ D. $[1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1]$

5. 某几何体的三视图如图所示, 其中俯视图右侧曲线为半圆弧. 则几何体的体积为



- | | |
|---------------|------------------------|
| A. $\pi - 2$ | B. $\frac{\pi}{2} - 1$ |
| C. $2\pi - 4$ | D. $\pi - 1$ |

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.将答案填在答题卡上.

13. 若 $(\frac{1}{x} + ax^2)^6$ 展开式中 x^1 的系数为 20, 则 $a =$ _____ . (用数字作答)

14. 若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 4 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y = kx + \frac{4}{3}$ 分为面积相等的两部分, 那么 $k =$ _____ .

15. 某科学兴趣小组的同学认为生物都是由蛋白质构成的, 高温可以使蛋白质变性失活, 于是想初步探究某微生物的成活率与温度的关系, 微生物数量 y (个) 与温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 的部分数据如下表:

温度 x ($^{\circ}\text{C}$)	4	8	10	18
微生物数量 y (个)	30	22	18	14

由表中数据算得回归方程为 $\hat{y} = -x + \hat{a}$, 预测当温度为 22°C 时, 微生物数量为 _____ 个.

16. 已知实数 a, b, c 成公差非零的等差数列, 集合 $A = \{(x, y) | ax + by + c = 0\}$, $P(-3, 2), N(2, 3), M \in A$, 若 $\overrightarrow{MP} \parallel (a, b)$, 则 $|MN|$ 的最大值为 _____ .

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

已知首项为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-S_1, S_1, 3S_2$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{S_n + \frac{1}{S_n}\}$ 的最大项.

18. (本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = b - 1, c = b + 1$.

(1) 若 $5\sin C = 7\sin A$, 求 AC 边上的中线 BD 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\cos B$ 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x^3 - ax - a, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 极小值点, 且 $f(x_0) = f(x_1), x_1 \neq x_0$, 求 $f(x_1 - x_0)$ 的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

2023 年 11 月, 世界首届人工智能峰会在英国举行, 我国因为在该领域取得的巨大成就受

邀进行大会发言. 为了研究不同性别的学生对人工智能的了解情况, 我市某著名高中进行了一次抽样调查, 分别抽取男、女生各 50 人作为样本. 设事件 $A = \text{“了解人工智能”}$, $B = \text{“学生为男生”}$, 据统计 $P(A | \bar{B}) = \frac{3}{5}$, $P(B | A) = \frac{4}{7}$.

(1) 根据已知条件, 填写下列 2×2 列联表, 是否有 99% 把握推断该校学生对人工智能的了解情况与性别有关?

	了解人工智能	不了解人工智能	合计
男生			
女生			
合计			

(2) 将样本的频率视为概率, 现从全校的学生中随机抽取 30 名学生, 设其中了解人工智能的学生的人数为 X , 求使得 $P(X = k)$ 取得最大值时的 $k (k \in \mathbf{N}^*)$ 值.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{ax}{e^x} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $x = -1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求 a ;
- (2) 函数 $f(x)$ 恰有一个零点, 求实数 a 的取值范围.

请考生在 22、23 二题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本题满分 10 分)

欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (i 为虚数单位, $\theta \in \mathbf{R}$) 可以表示平面直角坐标系 xOy 内的动点 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 其轨迹是圆, 所以又称其为神奇的欧拉转盘. 若 $2\sin\theta e^{i\theta}$ 表示的动点为 P .

- (1) 写出动点 P 的轨迹 C 的参数方程 (θ 为参数), 并化为普通方程;
- (2) 在以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 直线 l 过 $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, 求直线 l 被 C 截得的线段的长.

23. (本题满分 10 分)

设 $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 2, abc = 4$.

- (1) 证明: a, b, c 不可能都是正实数;
- (2) 比较 $|a| + |b| + |c|$ 与 6 的大小关系并说明理由.