内江市高中2024届第一次模拟考试题

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.)

1.D　2.B　3.D　4.C　5.A　6.B　7.B　8.A　9.D　10.B　11.A　12.C

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13.9　14.2　15.300　16.①③

三、解答题(共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答,第22、23题为选考题,考生根据要求作答.)

17.解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$\begin{cases}a_1+d=3\\5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d+a_1+2d=30\end{cases}$,

解得$\begin{cases}a_1=1\\b=2\end{cases}$ ……………………………… 2分

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$ ……………………………… 4分

$S_n=1\times n+\dfrac{n(n-1)\times2}{2}=n^2$ ……………………………… 6分

(2)由(1)得$a_{n+1}=2n+1,S_{n+1}=(n+1)^2$,

则$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ……………………………… 9分

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ……………………………… 12分

18.解:(1)为了判断两个函数模型:$y=\alpha+\beta x^2$,$y=e^{\lambda x+t}$拟合程度,只需要判断两个函数模型$y=\alpha+\beta u$,$v=\lambda x+t$拟合程度即可. ……………………………… 1分

设$\{u_i\}$和$\{y_i\}$的相关系数为r_1,$\{x_i\}$和$\{v_i\}$的相关系数为r_2,

由题意$r_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\bar{u})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{260}{150\times2}\approx0.87$ ……………………………… 3分

$r_2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(v_i-\bar{v})^2}}=\dfrac{18}{10\times2}=0.9$ ……………………………… 5分

显然$r_2>r_1>0$,因此从相关系数的角度,模型$y=e^{\lambda x+t}$的拟合程度更好……………… 6分

(2)先建立v关于x的线性回归方程,由$y=e^{\lambda x+t}$得,$\ln y=\lambda x+t$,即$v=\lambda x+t$,

$\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{18}{100}=0.18$,$t=\bar{v}-\lambda\bar{x}=5.36-0.18\times26=0.68$ ……………… 9分

所以v关于x的线性回归方程为$\hat{v}=0.18x+0.68$,即$\ln y=0.18x+0.68$ ……………… 11分

所求回归方程为 $\hat{y}=e^{0.18x+0.68}$ …………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}(x>0)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ ………………………………………………………………………… 2 分

$\because$ 当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)_{极小值}=f(1)=\dfrac{1}{2}$，无极大值 ……………………………………………………… 4 分

(2)$f(x)\geqslant x$，即$\dfrac{1}{2}ax^2-\ln x\geqslant x$，即 $ax^2\geqslant 2\ln x+2x$

$\because x>0$，$\therefore a\geqslant\dfrac{2(\ln x+x)}{x^2}$恒成立 …………………………………………………… 6 分

设 $F(x)=\dfrac{2(\ln x+x)}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，则只需 $a\geqslant F(x)_{max}$ ………………………… 7 分

$F'(x)=\dfrac{2(-x-2\ln x+1)}{x^3}$，令 $h(x)=-x-2\ln x+1(x>0)$

易知 $h(x)$在$(0,+\infty)$单调递减且 $h(1)=0$ ……………………………………………… 8 分

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，

$\therefore F(x)_{max}=F(1)=2$ ………………………………………………………………… 10 分

故 a 的取值范围为$[2,+\infty)$ …………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)$\because b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$

$\therefore b\sin\dfrac{\pi-A}{2}=a\sin B$，即 $b\cos\dfrac{A}{2}=a\sin B$

由正弦定理得，$\sin B\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\sin B$，即 $\sin B\cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin B$ …………… 3 分

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B>0$，$\cos\dfrac{A}{2}>0$

$\therefore \sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，又$\dfrac{A}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ ………………………………… 6 分

(2)$\because M$ 为$\triangle ABC$ 的重心，则 D 为线段 BC 的中点且 $AD=\dfrac{3}{2}AM=3\sqrt{3}$ ……………… 7 分

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A)$，

即 $27=\dfrac{1}{4}(c^2+b^2+bc)$　（ⅰ）………………………………………………………… 9 分

又由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc\cdot\cos A$，即 $36=b^2+c^2-bc$　（ⅱ）……………… 10 分

联立（ⅰ）（ⅱ）得 $bc=36$ …………………………………………………………… 11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times36\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ ……………………………………… 12 分

21. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f'(x)=\sin x+x\cdot\cos x-\sin x=x\cdot\cos x$ ………………… 1 分

当 x 在区间 $[0,\pi]$ 上变化时，$f'(x)$ 的变化如下表：

x	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π
$f'(x)$	0	+	0	−	$-\pi$

……… 4 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,\frac{\pi}{2})$，$f(x)$ 的单调减区间为 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ………………… 5 分

(2) 由 $f(x)=x\cdot\sin x+\cos x+\frac{1}{2}ax^2$，$x\in[0,\pi]$

可得 $f'(x)=ax+x\cdot\cos x=x(a+\cos x)$ ………………………………… 6 分

①当 $a\geqslant1$. 时，$a+\cos x\geqslant0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立

所以 $x\in[0,\pi]$ 时，$f'(x)=x(a+\cos x)\geqslant0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增.

又因为 $f(0)=1$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 0 个零点. ……………………… 8 分

②当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$ 有 $\cos x=-a$

由 $-1<-a<0$ 可知存在唯一的 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 使得 $\cos x_0=-a$

所以当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ………………………… 9 分

故 $f(x_0)>f(0)=1$，又 $f(\pi)=\frac{1}{2}a\pi^2-1$，

(ⅰ) 当 $f(\pi)=\frac{1}{2}a\pi^2-1>0$，即 $1>a>\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 0 个零点 ……… 10 分

(ⅱ) 当 $f(\pi)=\frac{1}{2}a\pi^2-1\leqslant0$，即 $0<a\leqslant\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 1 个零点 ……… 11 分

综上：当 $0<a\leqslant\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；当 $a>\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 有 0 个零点. …………… 12 分

22. 解：(1) 设 P 的极坐标为 $(\rho,\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为 $(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$ …………… 1 分

由已知得 $\rho\cdot\rho_1=16$，即 $\rho\cdot\frac{4}{\cos\theta}=16$，得 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta(\rho>0)$ ……… 3 分

所以 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$ ……………………………… 5 分

(备注，没有 $x\neq0$ 扣 1 分)

(2) 设点 B 的极坐标为 $(\rho_B,\alpha)(\rho_B>0)$，由题设知 $|OA|=2$，$\rho_B=4\cos\alpha$ …………… 6 分

于是 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho_B\cdot\sin\angle AOB=4\cos\alpha\cdot\left|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})\right|$

$=2\left|\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$ ………………………………………… 8 分

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{4\pi}{3}\leqslant2\alpha-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$

所以当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时，S 取得最大值 $2+\sqrt{3}$，所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$ ……… 10 分

23. 解：(1) 证明：因为 $a+b+c=3$，且 a,b,c 都是正数

所以 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{6}[(a+b)+(b+c)+(a+c)](\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})$ …… 2 分

$=\frac{1}{6}[3+(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+b}{b+c})+(\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{b+c})+(\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b})]$ …………………………… 3 分

$\geqslant\frac{1}{6}(3+2+2+2)=\frac{3}{2}$ …………………………………………………………………… 4 分

（当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号）

所以 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{3}{2}$ 得证 ………………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant3a^2+3b^2+3c^2$ …………………… 7 分

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant3$（当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号）

所以 $(a^2+b^2+c^2)_{\min}=3$ …………………………………………………………………… 8 分

由题意得 $-x^2+mx+2\leqslant3$ 恒成立，即 $x^2-mx+1\geqslant0$ 恒成立 ………………………… 9 分

因此 $\Delta=m^2-4\leqslant0$，即 $-2\leqslant m\leqslant2$，故存在实数 $m\in[-2,2]$ 使不等式成立 ………… 分