

## 2024 届“一诊”数学参考答案

一、选择题（60分）

理科：1-5.DABBD 6-10.CDADC 11-12.AA 文科：1-5.DABBB 6-10.CDADA 11-12.AA

二、填空题（20分）

理科：13. 50 14.11 15.  $[2, \infty)$  16.10 文科：13.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  14.11 15. -2 16.2

三、解答题（70分）

17. (1) 由  $a_1 = 1, S_n = \frac{1}{3}a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 得  $S_1 = a_1 = 1$

$3S_n = a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  .....2分

所以  $S_{n+1} = 4S_n \Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} = 4$

数列  $\{S_n\}$  是以1为首项，4为公比的等比数列

$\therefore S_n = 4^{n-1}$  .....5分

$\therefore a_n = \begin{cases} 1(n=1) \\ 3 \cdot 4^{n-2}(n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*) \end{cases}$  .....7分

(2)  $b_n = a_n + \log_4 S_n = a_n + (n-1)$ , .....9分

$T_n = S_n + \frac{1}{2}n(n-1) = 4^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)$ . .....12分

18. (1) 解：设物理、历史两门学科分别为  $m, n$ ，政治、地理、化学、生物分别为  $a, b, c, d$ ，

某同学根据方案进行随机选科，所得的结果为： $(m, a, b), (m, a, c), (m, a, d), (m, b, c)$

$(m, b, d), (m, c, d), (n, a, b), (n, a, c), (n, a, d), (n, b, c), (n, b, d), (n, c, d)$ ，共有12种情形，

所以一个学生恰好选到“史地政”的概率为  $P = \frac{1}{12}$ . (文科) .....6分

一个学生恰好选到“物化生”的概率为  $P = \frac{1}{12}$ ，由6个学生选科情况符合二项分布  $B(6, \frac{1}{12})$ ，

故期望为  $6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$  (理科) .....6分

(2)  $a=40, d=20$  .....8分

可得  $K^2 = \frac{100(40 \times 20 - 10 \times 30)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx 4.762 > 3.841$  .....11分

所以有95%的把握认为“选科与性别有关” .....12分

19. (1) 根据题意在  $Rt\triangle ABD$ ,  $AD = \frac{BD}{\sqrt{3}}$

在  $\triangle BCD$  中由余弦定理和正弦定理得

$$BD^2 = 13 - 12 \cos \theta, \sin \angle BDC = \frac{BC \sin \theta}{BD} = \frac{2 \sin \theta}{BD} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

在  $\triangle ACD$  中由余弦定理得

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos(\frac{\pi}{2} + \angle BCD) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$AC^2 = \frac{1}{3}BD^2 + 9 + \frac{2}{\sqrt{3}}BD \cdot 3 \cdot \frac{2 \sin \theta}{BD}$$

所以对角线  $AC = \sqrt{\frac{40}{3} + 4\sqrt{3} \sin \theta - 4 \cos \theta}$ ;  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知  $AC = \sqrt{\frac{40}{3} + 4\sqrt{3} \sin \theta - 4 \cos \theta} AC = \sqrt{\frac{40}{3} + 8 \sin(\theta - \frac{\pi}{6})} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以存在  $\theta = \frac{2\pi}{3}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, BD = \sqrt{19}$ , 对角线  $AC$  最长值为  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ,  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (1) 平行  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

取  $PB$  中点  $G$  连接  $EG$  和  $FG$ , 根据题意

$$\therefore EG \parallel \frac{1}{2}BC \parallel DF$$

所以四边形  $DEGF$  是平行四边形.  $\therefore DE \parallel FG$ ,

而  $DE \not\subset$  平面  $PBF, FG \subset$  平面  $PBF$

$\therefore DE \parallel$  平面  $PFB \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) (文科) 根据题意可得  $V_{E-PBF} = \frac{1}{2}V_{C-PBF} = \frac{1}{2}V_{P-BCF} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由  $\triangle PFB, PB = 4, PF = 3, BF = \sqrt{3}$ , 计算得  $S_{\triangle PBF} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \sin \angle PFB = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,

设  $E$  平面  $PFB$  的距离为  $d, \therefore \frac{1}{3}S_{\triangle PBF}d = \frac{1}{6}S_{\triangle PBF} \cdot PD = \frac{2\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以点  $E$  平面  $PFB$  的距离为  $d = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

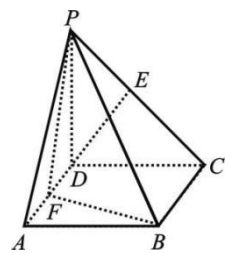
(理科) 如图不妨设  $AB=2$ , 由题意知  $AD = PD = 2\sqrt{2}$

以点  $D$  为原点建立如图所示空间直角坐标系  $D-xyz$ ,

$$D(0,0,0), P(0,0,2\sqrt{2}), F(1,0,0), E(0,1,\sqrt{2})'$$

设平面  $PFB$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 平面  $EBD$  的法向量为  $\vec{m} = (a, b, c)$

$$\vec{PF} = (1,0,-2\sqrt{2}), \vec{PB} = (2,2,2\sqrt{2}), \vec{DE} = (0,1,\sqrt{2}), \vec{DB} = (2,2,0) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$



则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PB} = x - 2\sqrt{2}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PF} = 2x + 2y - 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ , 可取  $z = 1, \vec{n} = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$  .....9 分

$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DB} = b + \sqrt{2}c = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DE} = 2a + 2b = 0 \end{cases}$ , 可取  $z = 1, \vec{m} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$  .....10 分

则  $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{7}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{55}}$

所以平面  $C_1MA$  与平面  $ABB_1A_1$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{330}}{55}$  .....12 分

21. (1)  $m > 2$

理由如下:  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x}$ , 令  $h(x) = xe^x - 1$ ,

$\therefore h'(x) = (x+1)e^x \quad \because x > 0, \therefore h'(x) > 0. \therefore h(x)$  在  $(0, +\infty)$  为增函数,

又  $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} - 1 < 0, h(1) = e - 1 > 0, \therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使  $h(x_0) = 0$

即  $x_0 e^{x_0} - 1 = 0, \therefore h(x)$  在  $(0, x_0)$  为负, 在  $(x_0, +\infty)$  为正.

$\therefore f(x)$  在  $(0, x_0)$  为减函数, 在  $(x_0, +\infty)$  为增函数.

$\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0, \text{ 又 } \because x_0 e^{x_0} - 1 = 0, \therefore e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, \ln x_0 = -x_0.$

$f(x)_{\min} = m = \frac{1}{x_0} + x_0 \quad \because x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \therefore m > 2$  .....5 分

(2)  $g'(x) = \frac{1}{x} - e^{x-m} = \frac{1 - xe^{x-m}}{x}$  令  $\varphi(x) = 1 - xe^{x-m}, \therefore \varphi'(x) = -(x+1)e^{x-m} < 0$

$\therefore \varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  为减函数, 又  $m > 2 \therefore \varphi(1) = 1 - e^{1-m} > 0, \varphi(m) = 1 - m < 0,$

$\therefore \exists x_1 \in (1, m), \text{ 使 } \varphi(x_1) = 1 - x_1 e^{x_1-m} = 0, e^{x_1-m} = \frac{1}{x_1} \therefore x_1 - m = -\ln x_1$

所以  $g(x)$  在  $(0, x_1)$  单调递增, 在  $(x_1, \infty)$  单调递减 .....8 分

由 (1) 知  $m = \frac{1}{x_0} + x_0 = \frac{1}{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + \ln \frac{1}{x_0} = x_1 + \ln x_1$

又因为函数  $y = x + \ln x$ ,  $x \in (0, \infty)$  是增函数, 所以  $x_1 = \frac{1}{x_0}$  .....10 分

(文科)  $g(x)_{\max} = g(x_1) = \ln x_1 - e^{x_1 - m} = \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = -(\ln \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}) = -(\ln x_0 + x_0) = 0$

(理科)  $g(x)_{\max} = g(x_1) = 2 + \ln x_1 - e^{x_1 - m} = 2 - (\ln \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}) = 2 - (\ln x_0 + x_0) = 2$  .....12 分

22. 解: (1)  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .  $l: x + y - 1 = 0$  .....5 分

(2) 由题意得  $A(\sqrt{3}, 1)$ .  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}$

$\therefore P(0, 1)$ .  $Q(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ .  $|PQ| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$

$d = \frac{|\sqrt{3} + 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\therefore S_{\Delta ADQ} = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}$  .....10 分

23. (1) ① 当  $x < -1$  时,  $-x - 1 - x + 2 \leq x + 5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$   $\therefore -\frac{4}{3} \leq x < -1$ .

② 当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $x + 1 - x + 2 \leq x + 5 \Leftrightarrow x \geq -2$   $\therefore -1 \leq x \leq 2$

③ 当  $x > 2$  时,  $x + 1 + x - 2 \leq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 6$   $\therefore 2 < x \leq 6$

综上所述不等式解集为  $[-\frac{4}{3}, 6]$  .....5 分

(2)  $\therefore \frac{|a+1| - |3a-1|}{|a|} = \left| \frac{1}{a} + 1 \right| - \left| \frac{1}{a} - 3 \right| \leq \left| \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{a} + 3 \right| = 4, \therefore |x+1| + |x-2| \geq 4$ .

① 当  $x < -1$  时,  $-x - 1 - x + 2 \geq 4, x \geq -\frac{3}{2}, \therefore x \leq -\frac{3}{2}$ .

② 当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $x + 1 - x + 2 \geq 4, 3 \geq 4$  无解.

③ 当  $x > 2$  时,  $x + 1 + x - 2 \geq 4, x \geq \frac{5}{2}, \therefore x \geq \frac{5}{2}$ .

所以  $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$  .....10 分