

秘密★启用前

自贡市普高 2024 届第一次诊断性考试  
数学试题（理工类）

本试卷共 6 页，23 题（含选考题），全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

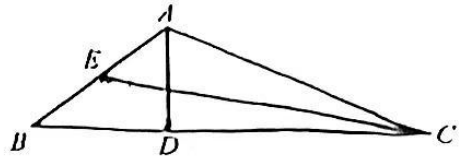
注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ， $B = \{-2, 0, 2\}$ ，则  $A \cap B =$ （  
A.  $\{-2, 0\}$       B.  $\{-2, 0, 2\}$       C.  $\{-2, 2\}$       D.  $\{0, 2\}$
2. 已知复数  $z = \frac{3+i}{i}$ ，则复数  $z$  的共轭复数  $\bar{z}$  在复平面内对应的点在（  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. “ $m > 2$ ”是“关于  $x$  的方程  $x^2 - \sqrt{m}x + 1 = 0$  有两个不等实根”的（  
A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 如图所示的  $\triangle ABC$  中，点  $D$  是线段  $BC$  上靠近  $B$  的三等分点，点  $E$  是线段  $AB$  的中点，则  $\overrightarrow{DE} =$  ( )



- A.  $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$       D.  $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$   
 C.  $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$       D.  $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

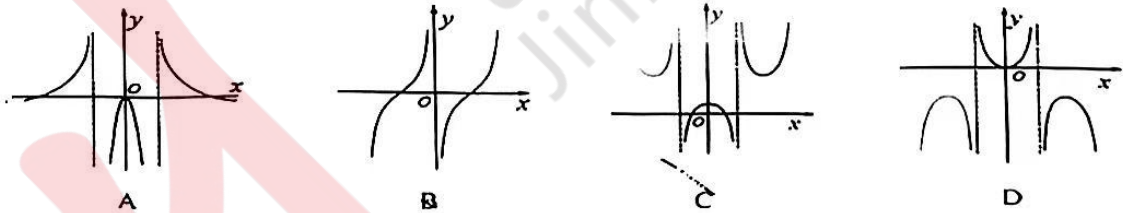
5. 2023 年成都大运会招募志愿者，现从某高校的 6 名志愿者中依次选出 4 名担任语言服务，2 名担任人员引导，1 名担任应急救援，每名志愿者只能担任一项，则甲乙不参与同一项志愿服务的选法有 ( ) 种

- A. 28      B. 36      C. 40      D. 44

6. 体育强国的建设是 2035 年我国发展的总体目标之一。某学校安排周一至周五每天 1 小时课外活动时间，现统计得小明同学最近 10 周的课外体育运动时间(单位：小时/周)：6.5, 6.3, 7.8, 9.2, 5.7, 7.9, 8.1, 7.2, 5.8, 8.3。则下列说法不正确的是

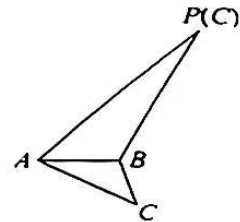
- A. 小明同学近 10 周的课外体育运动时间平均每天不少于 1 小时  
 B. 以这 10 周数据估计小明同学一周课外体育运动时间大于 8 小时的概率为 0.3  
 C. 小明同学 10 周的课外体育运动时间的中位数为 6.8  
 D. 若这组数据同时增加 0.5，则增加后的 10 个数据的极差、标准差与原数据的极差、标准差相比均无变化

7. 函数  $y = \frac{\lg(1+x^2)}{\cos x}$  的图象可能为 ( )



8.  $\triangle ABC$  中， $AB = 2, AC = 3, BC = \sqrt{5}$ ，将  $\triangle ABC$  绕  $AB$  旋转至  $\triangle ABP$  处，使平面  $ABP \perp$  平面  $ABC$ ，则多面体  $C-ABP$  的外接球表面积为 ( )

- A.  $14\pi$       B.  $16\pi$   
 C.  $18\pi$       D.  $20\pi$



9. 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中，提出了一些新的数列公式，所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同，前后两项之差并不相等，但是相邻两项之差成或者高次等差数列，对这类高阶等差数列的研究，在杨辉之后一般称为“垛积术”，现有高阶等差数列，其前7项分别为3, 7, 13, 23, 39, 63, 91，则该数列的第8项为（ ）

- A. 131                      B. 139                      C. 143

10. 在  $\triangle ABC$  中角  $A, B, C$  所对边  $a, b, c$  满足  $a = c - 2ac$ ，若  $b =$ （ ）

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 6 或  $\frac{15}{2}$

11. 定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(1+x) = f(1-x)$ ，且当  $x \in [0, 1]$  时， $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$ ，则函数  $g(x) = f(x) - \frac{1}{x-4}$  在  $[-2, 10]$  上所有零点的和为（ ）

- A. 16                      B. 32                      C. 36                      D. 48

12. 若  $a = \frac{1}{3}, b = \cos(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}), c = \frac{1}{\pi}$ ，则  $a, b, c$  满足的大小关系式是（ ）

- A.  $a > b > c$               B.  $a < b < c$               C.  $a > c > b$               D.  $b > c > a$

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分。）

13.  $(1+2x^2)(x+\frac{1}{x})^6$  展开式中常数项为\_\_\_\_\_，（用数字作答）

14. 已知点  $P(1,2), O(0,0)$ ，点  $M(x,y)$  满足  $\begin{cases} x+y \leq 6 \\ y-2x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = \overline{OP} \cdot \overline{OM}$  的最大值\_\_\_\_\_。

15. 若曲线  $y = \ln(x+a)$  的一条切线为  $y = ex + b$ ，其中  $a, b$  为正实数，则  $a + \frac{e}{b+2}$  的取值范围\_\_\_\_\_。

16. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$  将  $f(x)$  的图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变）得到函数  $g(x)$  的图象，若  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{18})$  上恰有1个极值点，则  $\omega$  的最大整数值为\_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：(本大题共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分)

17. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $a_1 = 1, S_n = \frac{1}{3}a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ )。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 在数列  $\{b_n\}$  中， $b_n = a_n + \log_4 S_n$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

18. (本小题满分 12 分)

2025 年四川省将实行 3+1+2 的高考模式，其中，“3”为语文、数学，外语 3 门参加全国统一考试，选择性考试科目为政治、历史、地理、物理、化学，生物 6 门，由考生根据报考高校以及专业要求，结合自身实际，首先在物理，历史中 2 选 1，再从政治、地理、化学、生物中 4 选 2，形成自己的高考选考组合。

(1) 若某小组共 6 名同学根据方案进行随机选科，求恰好选到“物化生”组合的人数的期望；

(2) 由于物理和历史两科必须选择 1 科，某校想了解高一新生选科的需求，随机选取 100 名高一新生进行调查，得到如下统计数据，写出下列联表中  $a, d$  的值，并判断是否有 95% 的把握认为“选科与性别有关”？

	选择物理	选择历史	合计
男生	$a$	10	
女生	30		
合计		30	

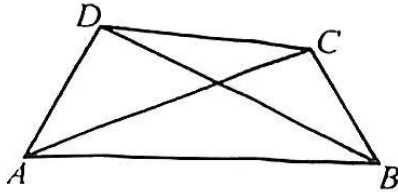
附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 > k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
$k_0$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879



19. (本小题满分 12 分)

如图：在平面四边形  $ABCD$  中,角  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ ,  $BC = 2, CD = 3$ . 设  $\angle BCD = \theta$ .

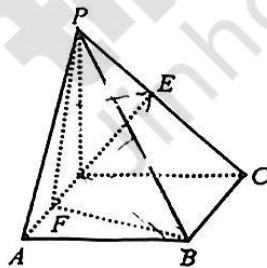


(1) 用  $\theta$  表示四边形  $ABCD$  对角线  $AC$  的长;

(2) 是否存在  $\theta$  使四边形  $ABCD$  对角线  $AC$  最长, 若存在求出  $\cos \theta$  及四边形对角线  $AC$  最长的值, 若不存在请说明理由.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是正方形, 侧棱  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $E$ 、 $F$  分别是  $PC$ 、 $AD$  中点.



(1) 判断直线  $DE$  与平面  $PFB$  的位置关系;

(2) 若  $PB$  与平面  $ABCD$  所成角为  $45^\circ$ , 求平面  $PFB$  与平面  $EDB$  所成二面角大小的正弦值.

21. (本小题满分 12 分)

函数  $f(x) = e^x - \ln x$  的最小值为  $m$ .

(1) 判断  $m$  与 2 的大小, 并说明理由;

(2) 求函数  $g(x) = 2 + \ln x - e^{x-m}$  的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 (22)、(23) 两题中任选一题作答, 如果多答, 则按做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号的方框涂黑.

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程  $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 直线  $l$  的参数方程

为以  $O$  为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系. 直线  $l$  的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1) 求曲线  $C$  和直线  $l$  的普通方程;

(2) 设点  $A$  的极坐标为  $(2, \frac{\pi}{6})$ , 曲线  $C$  和直线  $l$  的相交于  $P, Q$ , 求  $\triangle APQ$  的面积.

23. 选修 4-5: 不等式选讲

设  $f(x) = |x+1| + |x-2|$ .

(1) 求  $f(x) \leq x+5$  的解集;

(2) 若不等式  $f(x) \geq \frac{|a+1| - |3a-1|}{|a|}$  对任意实数  $a \neq 0$  恒成立, 求实数  $x$  的取值范围.