锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

2024 届“一诊”数学参考答案

一、选择题 （60 分）

理科：1-5.$DABBD$　6-10.$CDADC$　11-12.AA　　**文科**：1-5.$DABBB$　6-10.$CDADA$　11-12.AA

二、填空题（20 分）

理科：　13. 50　14.11　15. $[2,\infty)$　16.10　　**文科**：　13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　14.11　15. -2　16.2

三、解答题（70 分）

17.（1）由 $a_1=1, S_n=\frac{1}{3}a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）得 $S_1=a_1=1$

$3S_n=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ……………………………………………………………2 分

所以 $S_{n+1}=4S_n \Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n}=4$

数列 $\{S_n\}$ 是以 1 为首项，4 为公比的等比数列

$\therefore S_n=4^{n-1}$ ……………………………………………………………5 分

$\therefore a_n=\begin{cases}1(n=1)\\ 3\cdot 4^{n-2}(n\geq 2, n\in N^*)\end{cases}$ ……………………………………………………7 分

（2）$b_n=a_n+\log_4 S_n=a_n+(n-1)$，……………………………………………9 分

$T_n=S_n+\frac{1}{2}n(n-1)=4^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)$. ……………………………………………12 分

18.（1）解：设物理、历史两门学科分别为 m,n，政治、地理、化学、生物分别为 a,b,c,d，某同学根据方案进行随机选科，所得的结果为：$(m,a,b),(m,a,c),(m,a,d),(m,b,c)$

$(m,b,d),(m,c,d),(n,a,b),(n,a,c),(n,a,d),(n,b,c),(n,b,d),(n,c,d)$，共有 12 种情形，

所以一个学生恰好选到“史地政”的概率为 $P=\frac{1}{12}$.（文科）…………………………6 分

一个学生恰好选到“物化生”的概率为 $P=\frac{1}{12}$，由 6 个学生选科情况符合二项分布 $B(6,\frac{1}{12})$，

故期望为 $6\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ (理科）……………………………………………………6 分

（2）a=40，d=20……………………………………………………………………8 分

可得 $K^2=\frac{100(40\times 20-10\times 30)^2}{50\times 50\times 70\times 30}\approx 4.762>3.841$ ……………………………11 分

所以有 95% 的把握认为“选科与性别有关……………………………………………12 分

19.（1）根据题意在 $Rt\Delta ABD, AD=\frac{BD}{\sqrt{3}}$

在 ΔBCD 中由余弦定理和正弦定理得

$BD^2=13-12\cos\theta, \sin\angle BDC=\frac{BC\sin\theta}{BD}=\frac{2\sin\theta}{BD}$ ....3 分

在 ΔACD 中由余弦定理得

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos(\frac{\pi}{2}+\angle BCD)$. . . . . 6 分

$AC^2=\frac{1}{3}BD^2+9+\frac{2}{\sqrt{3}}BD\cdot 3\cdot.\frac{2\sin\theta}{BD}$

所以对角线 $AC=\sqrt{\frac{40}{3}+4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta}$； ....8 分

（2）由（1）知 $AC=\sqrt{\frac{40}{3}+4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta}AC=\sqrt{\frac{40}{3}+8\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}$ ....10 分

所以存在 $\theta=\frac{2\pi}{3},\cos\theta=-\frac{1}{2},BD=\sqrt{19}$，对角线 AC 最长值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, ...12 分

20. (1)平行 ....2 分

取 PB 中点 G 连接 EG 和 FG, 根据题意

$\therefore EG\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}BC\underline{\underline{//}}DF$

所以四边形 $DEGF$ 是平行四边形. $\therefore DE // FG$,

而 $DE\not\subset$ 平面$PBF, FG\subset$ 平面PBF

$\therefore DE //$ 平面 PFB..5 分

(2)（文科）根据题意可得 $V_{E-PBF}=\frac{1}{2}V_{C-PBF}=\frac{1}{2}V_{P-BCF}$ ....7 分

由 $\triangle PFB$，$PB=4, PF=3, BF=\sqrt{3}$, 计算得 $S_{\triangle PBF}=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\sin\angle PFB=\frac{\sqrt{11}}{2}$,

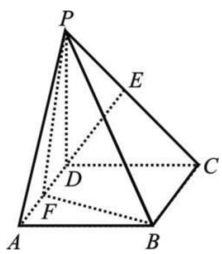
设 E 平面 PFB 的距离为 d, $\therefore\frac{1}{3}S_{\triangle PBF}d=\frac{1}{6}S_{\triangle PBF}\cdot PD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ....10 分

所以点 E 平面 PFB 的距离为 $d=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{22}}{11}$ ....12 分

（理科）如图不妨设 AB=2，由题意知 $AD=PD=2\sqrt{2}$

以点 D 为原点建立如图所示空间直角坐标系 D-xyz，

$D(0,0,0), P(0,0,2\sqrt{2}), F(1,0,0).E(0,1,\sqrt{2})$,



设平面 PFB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，平面 EBD 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$

$\overline{PF}=(1,0,-2\sqrt{2}),\overline{PB}=(2,2,2\sqrt{2}),\overline{DE}=(0,1,\sqrt{2}),\overline{DB}=(2,2,0)$ ....7 分

锦宏教育 Jinhong Education

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=x-2\sqrt{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}=2x+2y-2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，可取$z=1,\vec{n}=(2\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ ....9 分

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=b+\sqrt{2}c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=2a+2b=0\end{cases}$，可取$z=1,\vec{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ ....10 分

则$\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{7}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{7}{\sqrt{55}}$

所以平面C_1MA与平面ABB_1A_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{55}}=\dfrac{\sqrt{330}}{55}$ ....12 分

21.（1）　$m>2$

理由如下：　$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xe^x-1}{x}$，令$h(x)=xe^x-1$，

$\therefore h'(x)=(x+1)e^x$　　$\because x>0,\therefore h'(x)>0$．$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$为增函数，

又$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}-1<0$．$h(1)=e-1>0$，$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使$h(x_0)=0$

即$x_0e^{x_0}-1=0$，　$\therefore h(x)$在$(0,x_0)$为负，在$(x_0,+\infty)$为正．

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$为减函数，在$(x_0,+\infty)$为增函数．

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0$，　又$\because x_0e^{x_0}-1=0$，　$\therefore e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$　，$\ln x_0=-x_0$．

$f(x)_{\min}=m=\dfrac{1}{x_0}+x_0$　　$\because x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ $\therefore m>2$ ....5 分

（2）$g'(x)=\dfrac{1}{x}-e^{x-m}=\dfrac{1-xe^{x-m}}{x}$　　令$\varphi(x)=1-xe^{x-m}$，　$\therefore \varphi'(x)=-(x+1)e^{x-m}<0$

$\therefore \varphi(x)$在$(0,+\infty)$为减函数，又$m>2\because \varphi(1)=1-e^{1-m}>0,\ \varphi(m)=1-m<0$，

$\therefore \exists x_1\in(1,m)$，使$\varphi(x_1)=1-x_1e^{x_1-m}=0$，$e^{x_1-m}=\dfrac{1}{x_1}\therefore x_1-m=-\ln x_1$

.所以$g(x)$在（0，x_1）单调递增，在（x_1，∞）单调递减...8 分

由（1）知$m=\dfrac{1}{x_0}+x_0=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{1}{x_0}=x_1+\ln x_1$

又因为函数 $y=x+\ln x$，$x\in(0,\ \infty)$ 是增函数，所以 $x_1=\dfrac{1}{x_0}$ ....10 分

（文科）$g(x)_{\max}=g(x_1)=\ln x_1-e^{x-m}=\ln x_1-\dfrac{1}{x_1}=-(\ln\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1})=-(\ln x_0+x_0)=0$

（理科）$g(x)_{\max}=g(x_1)=2+\ln x_1-e^{x_1-m}=2-(\ln\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1})=2-(\ln x_0+x_0)=2$............12 分

22.解：（1）$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．　$l:x+y-1=0$ ....5 分

（2）由题意得 $A(\sqrt{3},1)$．$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow 5x^2+8x=0\Rightarrow x_1=0,x_2=\dfrac{8}{5}$

$\therefore P(0,1)$．$Q\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$．$|PQ|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$

$$d=\frac{|\sqrt{3}+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\therefore S_{\Delta ADQ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ ....10 分

23.（1）①当 $x<-1$ 时，$-x-1-x+2\le x+5\Leftrightarrow x\ge-\dfrac{4}{3}$　　$\therefore -\dfrac{4}{3}\le x<-1$．

②当 $-1\le x\le 2$ 时，$x+1-x+2\le x+5\Leftrightarrow x\ge -2$　　$\therefore -1\le x\le 2$

③当 $x>2$ 时，$x+1+x-2\le x+5\Leftrightarrow x\le 6$　　$\therefore 2<x\le 6$

综上不等式解集为 $\left[-\dfrac{4}{3},6\right]$ ....5 分

（2）$\because \dfrac{|a+1|-|3a-1|}{|a|}=\left|\dfrac{1}{a}+1\right|-\left|\dfrac{1}{a}-3\right|\le\left|\dfrac{1}{a}+1-\dfrac{1}{a}+3\right|=4,\therefore |x+1|+|x-2|\ge 4$．

①当 $x<-1$ 时，$-x-1-x+2\ge 4$，$x\ge-\dfrac{3}{2}$，$\therefore x\le-\dfrac{3}{2}$．

②当 $-1\le x\le 2$ 时，$x+1-x+2\ge 4$，$3\ge 4$ 无解.

③当 $x>2$ 时，$x+1+x-2\ge 4$，$x\ge\dfrac{5}{2}$，$\therefore x\ge\dfrac{5}{2}$．

所以 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ ....10 分