遂宁市高中 2024 届零诊考试

数学（理科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（每小题 5 分，12 小题，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	A	B	B	C	A	D	C	B	D

二、填空题（每小题 5 分，4 个小题，共 20 分）

13. $\sqrt{10}$　　14. 5　　15. 2　　16. $\{1011,1012\}$

三、解答题

17.（1） $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，..............3 分

因为$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，所以$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$，..........................5 分

故函数 $y=f(x)$ 在单调增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$；................................6 分

（2）将 $f(x)$ 向左平移 m 个单位得到 $f_1(x)=2\sin(2(x+m)+\frac{\pi}{6})-1$

将 $f_1(x)$ 纵坐标不变，横坐标变为原来的两倍得到 $g(x)=2\sin(x+2m+\frac{\pi}{6})-1$，

又因为 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 $\frac{\pi}{3}+2m+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，..............9 分

解得：$m=\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，..10 分

因为 $m>0$，所以当 $k=1$ 时，$m=\frac{\pi}{2}$ 取得最小值，..11 分

故 $g(x)=-2\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$..12 分

18.（1）当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)+1=n^2-3n+3$..................................1 分

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n+1-(n^2-3n+3)=2n-2$..3 分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$...4 分

故 $a_n=\begin{cases}1,n=1\\2n-2,n\ge 2\end{cases}(n\in N^*)$...5 分

（2）$b_1=\dfrac{1}{a_1\cdot a_2}=\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}$……6 分

当$n\geq 2$时，$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-2)2n}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$……8 分

故$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4n}$……10 分

要使$T_n\leq\dfrac{45}{64}$,即$\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4n}\leq\dfrac{45}{64}$,解得$n\leq\dfrac{16}{3}$,又$n\in N^*$，故$n$的最大值为 5. ……12 分

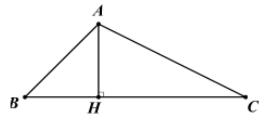
19.（1）由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\cos B$，$B=\dfrac{\pi}{4}$……1 分

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，则$\dfrac{1}{2}\times 3\times 1=\dfrac{1}{2}\times 3\times c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$c=\sqrt{2}$……3 分

又由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2a\cos B=5$，所以$b=\sqrt{5}$……5 分

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$……6 分

（2）由正弦定理，$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3}{\sin A}$，



所以$c=\dfrac{3\sin C}{\sin A}=\dfrac{3\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-A\right)}{\sin A}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{1}{\tan A}\right)$……8 分

又因为锐角$\triangle ABC$，所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{3\pi}{4}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$0<\dfrac{1}{\tan A}<1$……9 分

所以$\dfrac{3}{\sqrt{2}}<c<\dfrac{6}{\sqrt{2}}$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}c\in\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{9}{2}\right)$……11 分

即$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{9}{2}\right)$……12 分

20.（1）若$a=2$，则$f'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$

令$f'(x)=0$，解得$x_1=-1,x_2=-\dfrac{1}{3}$……2 分

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的取值情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

且 $f(-2)=-1<0, f(-1)=1>0, f(-\frac{1}{3})=\frac{23}{27}>0$……………………………………………4 分

根据零点存在定理可得：$f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 有一个零点，

所以函数 $f(x)$ 的极大值为1，极小值为 $\frac{23}{27}$，且 $f(x)$ 有 1 个零点．………………5 分

（2）由题意知，x_1,x_2 是方程 $3x^2+2ax+1=0$ 的两个不等实根，且 $x_1<x_2$，$a^2>3$

由韦达定理知，$x_1+x_2=-\frac{2a}{3}, x_1x_2=\frac{1}{3}, {x_1}^2+{x_2}^2=\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}$，

$x_1-x_2=-\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=-\sqrt{\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3}$……………………………………………8 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1^3+ax_1^2+x_1+1\right)-\left(x_2^3+ax_2^2+x_2+1\right)$

$=\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+a\left(x_1+x_2\right)+1\right]$…………………………………………………………9 分

$=-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a^2+1\right)=\frac{4}{27}\left(\sqrt{a^2-3}\right)^3$…………………………………………………………10 分

其中 $a<-\sqrt{3}$ 或 $a>\sqrt{3}$.

令 $t=\sqrt{a^2-3}$，则 $g(t)=\frac{4}{27}t^3, t>0$，因为 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增………………………11 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围是 $(0,+\infty)$……………………………………………………………… 12 分

21.（1）$\because f(x)=ae^{3x}-x$，$\therefore f'(x)=3ae^{3x}-1$……………………………………………………1 分

（i）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减………………………………………3 分

（ii）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{\ln 3a}{3}$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\ln 3a}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\ln 3a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增..........5 分

（2）由题意得， $f(x)-h(x)=ae^{3x}-x-3x^2+x\ln x\geq 0$，

则 $\frac{a\mathrm{e}^{3x}}{x}-3x+\ln x-1\geq 0$，即 $a\mathrm{e}^{3x-\ln x}-\left(3x-\ln x\right)-1\geq 0$， ....7 分

令 $t=g\left(x\right)=3x-\ln x\left(x>0\right)$，则 $g'\left(x\right)=3-\frac{1}{x}=\frac{3x-1}{x}$，

当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时， $g'\left(x\right)<0$， $g\left(x\right)$ 单调递减，

当 $x>\frac{1}{3}$ 时， $g'\left(x\right)>0$， $g\left(x\right)$ 单调递增，

所以 $t=g\left(x\right)\geq g\left(\frac{1}{3}\right)=1-\ln\frac{1}{3}=\ln 3\mathrm{e}$ ....9 分

由 $a\mathrm{e}^{t}-t-1\geq 0$，即 $a\geq\frac{t+1}{\mathrm{e}^{t}}$，

令 $\varphi(t)=\frac{t+1}{e^{t}}(t\geq\ln 3e)$，则 $\varphi'(t)=\frac{-t}{e^{t}}<0$ 恒成立，

则 $\varphi(t)$ 在 $\left[\ln 3\mathrm{e},+\infty\right)$ 单调递减，所以 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(\ln 3e)=\frac{2+\ln 3}{3e}$， ....11 分

所以 $a\geq\varphi(t)_{\max}=\frac{2+\ln 3}{3e}$，因此，$a$ 的取值范围是 $[\frac{2+\ln 3}{3e},+\infty)$ ....12 分

22.（1）令 $x=0$，则 $t^2-2t-3=0$，解得 $t=-1$（舍）或 $t=3$，则 $y=-4$，

即 $A(0,-4)$ ....2 分

令 $y=0$，则 $-t^2+t+2=0$，解得 $t=2$ 或 $t=-1$（舍），则 $x=-3$，即 $B(-3,0)$ .....4 分

$\therefore S=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$； ....5 分

（2）由（1）可知圆心坐标为 $\left(-\frac{3}{2},-2\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{(0+3)^2+(0+4)^2}}{2}=\frac{5}{2}$

则以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$，

即 $x^2+3x+y^2+4y=0$ ....8 分

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 可得，以 AB 为直径的圆的极坐标方程为 $\rho+3\cos\theta+4\sin\theta=0$.

....10 分

23.（1）由题知，当$m=1$时，原不等式即$|x+1|+|x-2|\le 5$，..1 分

当$x\le -1$时，不等式为$-x-1-x+2\le 5$，解得$-2\le x\le -1$；.......................................2 分

当$-1<x<2$时，不等式为$x+1-x+2\le 5$，恒成立；..3 分

当$x\ge 2$时，不等式为$x+1+x-2\le 5$，解得$2\le x\le 3$，..4 分

综上，不等式$f(x)\le 5$的解集为$\{x|-2\le x\le 3\}$；..5 分

（2）因为$|x+m|+|x-2m|\ge |x+m-x+2m|=|3m|$，

当且仅当$(x+m)(x-2m)\le 0$时不等式取等号，即$f(x)_{\min}=|3m|$，............................8 分

所以$|3m|>1-m$，解得$m<-\frac{1}{2}$或$m>\frac{1}{4}$，

所以m的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$. ....10 分