资阳市高中2021级第一次诊断性考试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上。并将条形码贴在答题卡上对应的虚线框内。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,其共轭复数为 $\overline{z}$,则 $|\overline{z}+3\mathrm{i}|=$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　　　D. $\sqrt{26}$

2. 已知集合 $M=\{x|(x-1)(x-2)<0\}$,$N=\{x|\dfrac{x}{x-1}>0\}$,则

A. $N\subseteq M$　　　　B. $M\subseteq N$

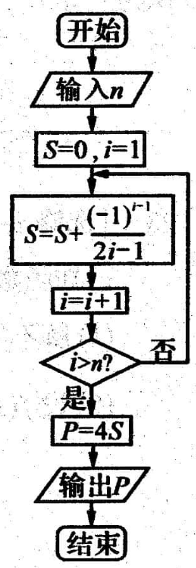
C. $M\cup N=\mathbf{R}$　　　　D. $M\cap N=\varnothing$

3. 设 α 是第二象限角,$P(x,1)$ 为其终边上一点,且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}x$,则 $\tan\alpha=$

A. $-2\sqrt{2}$　　　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　　　D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

4. 明安图是我国清代杰出的数学家、天文历法家和测绘学家,论证了幂级数展开式和圆周率的无穷级数表达式等多个公式,著有《割圆密率捷法》一书,在我国数学史上占有重要地位. 如图所示的程序框图就是利用新级数公式来计算圆周率的近似值的(其中 P 表示 π 的近似值). 若输入 n 的值是15,则输出的结果为



A. $P=4\times(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots-\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{25})$

B. $P=4\times(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{27})$

C. $P=4\times(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{29})$

D. $P=4\times(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{29}-\dfrac{1}{31})$

5. 若函数$y=\lg(2-ax)$在区间$(0,2)$内单调递减，则a的取值范围是

A. $(0,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

6. 已知$x>0,y>0$，且$\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=1$，则$2x+y$的最小值为

A. 16　　B. $8+4\sqrt{2}$

C. 12　　D. $6+4\sqrt{2}$

7. 已知$f(x)$是定义域为R的奇函数，当$x>0$时，$f(x)$单调递增，且$f(4)=0$，则满足不等式$x\cdot f(x-1)<0$的x的取值范围是

A. $(-3,1)$　　B. $(1,5)$

C. $(-3,0)\cup(1,5)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,5)$

8. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=3$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. $\sin40^\circ(\tan10^\circ-\sqrt{3})=$

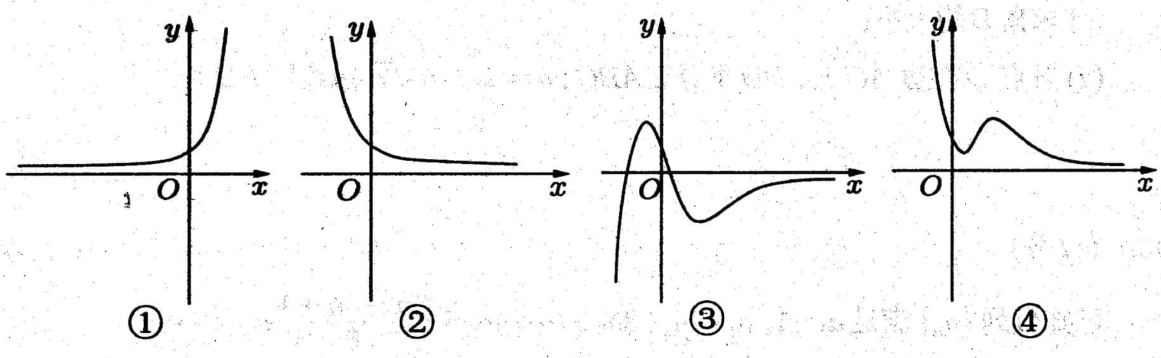
A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

10. 已知$a=2^{\frac{3}{4}}$，$b=\sqrt{\pi}$，$c=\log_3 4$，则a,b,c的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $b>c>a$　　D. $a>c>b$

11. 给出下列四个图象：



函数$f(x)=\frac{ax^2+1}{e^x}$的大致图象的可以是

A. ①③　　B. ②③　　C. ②④　　D. ②③④

12. 将函数$f(x)=\cos x-\frac{x+2}{e^x}$在$(0,+\infty)$上的所有极值点按照由小到大的顺序排列，得到数列$\{x_n\}$（其中$n\in\mathbf{N}^*$），则

A. $(n-\frac{1}{2})\pi<x_n<(n+\frac{1}{2})\pi$　　B. $x_{n+1}-x_n<\pi$

C. $x_n+x_{n+1}>(2n-1)\pi$　　D. $\{|x_n-(n-1)\pi|\}$为递减数列

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数$f(x)=[ax^3+(a-2)x^2]\cdot(e^x-e^{-x})$为偶函数，则实数$a$的值为________.

14. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=4$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

15. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$的一个零点为$\frac{\pi}{12}$，则$\omega$的最小值为________.

16. 若函数$f(x)=e^x+\cos x+(a-1)x$存在最小值，则a的取值范围是________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (12分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_9+a_{10}=40$，$S_8=8(a_1+a_3)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a_n}{n(n+1)}$，记$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，求$T_{2n}$.

18. (12分)

记$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，已知$b\sin C=c\sin\dfrac{B}{2}$.

(1)求角B的大小；

(2)若点D在边AC上，BD平分$\angle ABC$，$a=2$，$b=\sqrt{7}$，求线段BD长.

19. (12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\dfrac{2n^2+3n+1}{6}a_n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记$\log_3 b_n=a_n$，求数列$\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$的前n项和T_n.

20. (12分)

已知函数$f(x)=x\ln x-ax^2-x+1$.

(1)若$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,求a的取值范围;

(2)若$f(x)$有两个极值点x_1,x_2,证明:$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$.

21. (12分)

已知函数$f(x)=e^x-3ax^2$.

(1)若$f(x)$有3个零点,求a的取值范围;

(2)若$x\geqslant 0$,$f(x)\geqslant ax^3+x+1$,求a的取值范围.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中,曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),过点$(2,0)$的直线$l$与$C$仅有一个公共点,该公共点在第一象限,以$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求C和l的极坐标方程;

(2)已知$P(\rho,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,$Q$分别为$l$和$C$上的动点,且$\angle POQ=90°$,若$\triangle POQ$的面积为1,求$\theta$.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=2|x-1|+|x+1|$.

(1)解不等式$f(x)\leqslant 4-2x$;

(2)设$f(x)$的最小值为M,正数a,b满足$a+b=M$,求证:$(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2\geqslant\frac{9}{2}$.