资阳市高中2021级第一次诊断性考试

文科数学参考答案和评分意见

注意事项：

1. 本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

1－5：BBDCC；6－10：DCACA；11－12：BD

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 2； 14. 1； 15. 10； 16. $(-\infty,1)$.

三、解答题：本大题共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(一)必考题：共60分。

17. (12分)

(1) 设公差为 d,

依题意，得 $\begin{cases} a_1+8d+a_1+9d=40, \\ 8a_1+\dfrac{8\times7}{2}d=8(2a_1+2d), \end{cases}$ ……2分

即 $\begin{cases} 2a_1+17d=40, \\ a_1=\dfrac{3}{2}d, \end{cases}$ 解得 $a_1=3$, $d=2$, ……4分

所以 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……6分

(2) 由(1)知，$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a_n}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$, ……8分

则 $T_{20}=\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20}\right)-\left(\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{21}\right)$

$=1-\dfrac{1}{21}$

$=\dfrac{20}{21}$. ……12分

18. (12分)

(1) 由已知 $b\sin C=c\sin\dfrac{B}{2}$，根据正弦定理，得 $\sin B\sin C=\sin C\sin\dfrac{B}{2}$, ……1分

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq 0$,

故有 $\sin B=\sin\frac{B}{2}$, ……2分

即有 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}$,

因为 $\frac{B}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\sin\frac{B}{2}\neq 0$,则 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$, ……4分

所以,$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$,则 $B=\frac{2\pi}{3}$. ……5分

(2)依题意,$\frac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}$,

即 $a\cdot BD+c\cdot BD=ac$,也即为 $2BD+c\cdot BD=2c$,

所以 $BD=\frac{2c}{2+c}$, ……9分

在 $\triangle ABC$ 中,根据余弦定理,

有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+c^2+ac$,即 $7=4+c^2+2c$,

解得 $c=1$,或 $c=-3$(舍去),

所以 $BD=\frac{2c}{2+c}=\frac{2}{3}$. ……12分

19. (12分)

(1)由已知,$n=1$ 时,$a_1^2+1=2S_1=2a_1$,

即有 $(a_1-1)^2=0$,解得 $a_1=1$, ……2分

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $a_n^2+n=2S_n$,得 $a_{n-1}^2+n-1=2S_{n-1}$,

两式相减,得到 $a_n^2-a_{n-1}^2+1=2a_n$, ……4分

即有 $(a_n-1)^2-a_{n-1}^2=0$,则 $(a_n-1+a_{n-1})(a_n-1-a_{n-1})=0$,

因为 $\{a_n\}$ 单调递增,且 $a_1=1$,则 $a_n\geqslant 1$, $a_n-1+a_{n-1}>0$,

所以 $a_n-1-a_{n-1}=0$,即 $a_n-a_{n-1}=1$, ……5分

故 $\{a_n\}$ 是首项为1,公差为1的等差数列,

所以,$\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n$. ……6分

(2)由 $\log_3 b_n=a_n$,得 $b_n=3^{a_n}=3^n$, $\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{3^n}$, ……7分

所以 $T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$, ①

则有 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$, ② ……8分

①式 $-$ ②式,得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$$=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$ ……10分

$$=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\times 3^{n+1}},$$

所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}$. ……12分

20. (12分)

(1) 由$f(x)=x\ln x-ax^2-x$,得$f'(x)=\ln x-2ax$,

因为$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以$f'(x)=\ln x-2ax\leqslant 0$即$2a\geqslant\frac{\ln x}{x}$在$(0,+\infty)$时恒成立,

令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

可知,$0<x<\mathrm{e}$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;$x>\mathrm{e}$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

故$x=\mathrm{e}$时,$g(x)$在$(0,+\infty)$上取得极大值$g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,也即为最大值.

所以,$2a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$,得$a\geqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}$,

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减时,a的取值范围是$[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty)$. ……………………………5分

(2) 由(1)知,$f'(x)=\ln x-2ax$,

函数$f(x)$有两个极值点x_1,x_2,则$f'(x)=\ln x-2ax$有两个零点x_1,x_2,

不妨设$0<x_1<x_2$,于是$\begin{cases}\ln x_1-2ax_1=0,\\ \ln x_2-2ax_2=0,\end{cases}$

则$\ln x_2-\ln x_1=2a(x_2-x_1)$,$\frac{1}{2a}=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$,于是

$$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}-2=\frac{1}{2ax_1}+\frac{1}{2ax_2}-2=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})-2=\frac{\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}}{\ln\frac{x_2}{x_1}}.$$

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$,则$\ln\frac{x_2}{x_1}>0$,$\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}=t-\frac{1}{t}-2\ln t$,

设$h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$,则$h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{t^2-2t+1}{t^2}>0$,

故函数$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,则$h(t)>h(1)=0$,则$\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}>0$,

所以$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}-2>0$,即$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$. ……………………………………………12分

21. (12分)

(1) 因为$f(x)=\mathrm{e}^x-3ax^2$有三个零点,

所以方程$\mathrm{e}^x-3ax^2=0$即$\frac{1}{3a}=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$有三个实数根,

令$g(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$,则$g'(x)=\frac{2x-x^2}{\mathrm{e}^x}=\frac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}$,

则$x<0$时,$g'(x)<0$;$0<x<2$时,$g'(x)>0$;$x>2$时,$g'(x)<0$,

所以,当$x=0$时,$g(x)$取极小值$g(0)=0$;$x=2$时,$g(x)$取极大值$g(2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$,

又$x\to-\infty$时,$g(x)\to+\infty$;$x\to+\infty$时,$g(x)\to 0$,

所以,$\frac{1}{3a}=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$有三个实数根时,$0<\frac{1}{3a}<\frac{4}{\mathrm{e}^2}$,即$a>\frac{\mathrm{e}^2}{12}$,

综上所述,$f(x)$有3个零点时,a的取值范围是$\left(\frac{\mathrm{e}^2}{12},+\infty\right)$. ……………………………5分

(2) 令 $h(x)=f(x)-(ax^3+x+1)=e^x-ax^3-3ax^2-x-1$,

则有 $h'(x)=e^x-3ax^2-6ax-1$, 且 $h'(0)=0$, $h(0)=0$,

设 $u(x)=h'(x)=e^x-3ax^2-6ax-1$,则 $u'(x)=e^x-6ax-6a$,

又令 $v(x)=u'(x)=e^x-6ax-6a$,则 $v'(x)=e^x-6a$,

因为 $a\leqslant\frac{1}{6}$ 时,所以 $v'(0)=1-6a\geqslant 0$,

由于 $v'(x)$ 为单调递增函数,可知 $v'(x)\geqslant v'(0)\geqslant 0$,

则 $v(x)$ 即 $u'(x)$ 单调递增,故 $u'(x)\geqslant u'(0)=1-6a\geqslant 0$,

所以 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 为单调递增函数,

则 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$,则 $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$,即 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant ax^3+x+1$ 恒成立. ……………………12分

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修4－4:坐标系与参数方程](10分)

(1) 由于 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$

所以 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1$,其极坐标方程为 $\rho=1$, ……………………2分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=1$. ……………………5分

(2) 由题可知, $\triangle POQ$ 面积 $S=\frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ|=\frac{1}{2}|\rho|=\dfrac{1}{2\cos(\theta-\frac{\pi}{3})}$, ……………………7分

因为 $\triangle POQ$ 的面积 S 为1,则 $S=\dfrac{1}{2\cos(\theta-\frac{\pi}{3})}=1$,则 $\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$, ……………………8分

由于 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,则 $-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{3}$,则 $\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$,

所以, $\theta=0$, $\frac{2\pi}{3}$, π 或 $\frac{5\pi}{3}$. ……………………10分

23. [选修4－5:不等式选讲](10分)

(1) 当 $x<-1$ 时, $f(x)=-2x+2-x-1=-3x+1\leqslant 4-2x$,得 $-3\leqslant x<-1$;

……………………2分

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=-2x+2+x+1=-x+3\leqslant 4-2x$,得 $-1\leqslant x\leqslant 1$; ……………………3分

当 $x>1$ 时, $f(x)=2x-2+x+1=3x-1\leqslant 4-2x$,此时不成立, ……………………4分

综上所述,原不等式解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$. ……………………5分

(2) 由(1)可知, $x<-1$ 时, $f(x)=-3x+1>4$; $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=-x+3\geqslant 2$; $x>1$ 时, $f(x)=3x-1>2$,所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $M=2$,则 $a+b=2$. ……………………7分

因为 $[(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2](1^2+1^2)\geqslant(a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2})^2=9$,

所以 $(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2\geqslant\frac{9}{2}$,当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.

所以, $(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2\geqslant\frac{9}{2}$. ……………………10分