资阳市高中2021级第一次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上。并将条形码贴在答题卡上对应的虚线框内。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$M=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{x|\frac{x}{x-2}<0\}$，则$M\cap N=$

A. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　C. $\{x|2\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|2<x\leqslant 3\}$

2. 设复数$z=\frac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则其共轭复数$\bar{z}=$

A. $-1+2\mathrm{i}$　　B. $-1-2\mathrm{i}$　　C. $2+2\mathrm{i}$　　D. $2-2\mathrm{i}$

3. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,k)$. 若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$k=$

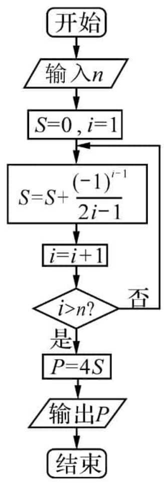
A. 4　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 2　　D. -4

4. 设α是第二象限角，$P(x,1)$为其终边上一点，且$\cos\alpha=\frac{1}{3}x$，则$\tan\alpha=$

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

5. 明安图是我国清代杰出的数学家、天文历法家和测绘学家，论证了幂级数展开式和圆周率的无穷级数表达式等多个公式，著有《割圆密率捷法》一书，在我国数学史上占有重要地位. 如图所示的程序框图就是利用新级数公式来计算圆周率的近似值的（其中P表示π的近似值）. 若输入n的值是15，则输出的结果为



A. $P=4\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{23}+\frac{1}{25})$

B. $P=4\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{25}-\frac{1}{27})$

C. $P=4\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{27}+\frac{1}{29})$

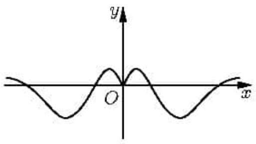
D. $P=4\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{29}-\frac{1}{31})$

6. 若函数 $y=\lg(2-ax)$ 在区间 $(0,2)$ 内单调递减，则 a 的取值范围是

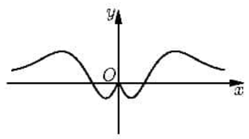
A. $(0,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

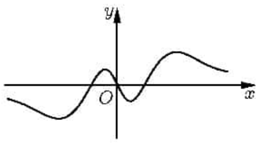
7. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3-3\sin x}{e^{|x|}}$ 的大致图象是



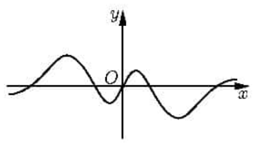
A.



B.



C.



D.

8. 已知 $x>0,y>0$，且 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则 $2x+y$ 的最小值为

A. 16　　B. $8+4\sqrt{2}$

C. 12　　D. $6+4\sqrt{2}$

9. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(4)=0$，则满足不等式 $x\cdot f(x-1)<0$ 的 x 的取值范围是

A. $(-3,1)$　　B. $(1,5)$

C. $(-3,0)\cup(1,5)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,5)$

10. $\sin 40^\circ(\tan 10^\circ-\sqrt{3})=$

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

11. 已知 $a=2^{\frac{3}{4}}$，$b=\sqrt{\pi}$，$c=\log_3 4$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $b>c>a$　　D. $a>c>b$

12. 将函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的所有极值点按照由小到大的顺序排列，得到数列 $\{x_n\}$ (其中 $n\in\mathbf{N}^*$)，则

A. $(n-\dfrac{1}{2})\pi<x_n<(n+\dfrac{1}{2})\pi$　　B. $x_{n+1}-x_n<\pi$

C. $x_n+x_{n+1}>(2n-1)\pi$　　D. $\{|x_n-(n-1)\pi|\}$ 为递减数列

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数 $f(x)=[ax^3+(a-2)x^2]\cdot(e^x-e^{-x})$ 为偶函数，则实数 a 的值为________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=4$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})\ (\omega>0)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{12}$，则 ω 的最小值为________.

16. 若函数 $f(x)=e^x+\cos x+(a-1)x$ 存在最小值，则 a 的取值范围是________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_9+a_{10}=40$，$S_8=8(a_1+a_3)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=(-1)^{n+1}\frac{a_n}{n(n+1)}$，求 $\{b_n\}$ 的前20项和 T_{20}.

18. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，已知 $b\sin C=c\sin\frac{B}{2}$.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若点 D 在边 AC 上，BD 平分 $\angle ABC$，$a=2$，$b=\sqrt{7}$，求线段 BD 长.

19. (12分)

已知单调递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n^2+n=2S_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $\log_3 b_n=a_n$，求数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. (12分)

已知函数$f(x)=x\ln x-ax^2-x+1$.

(1) 若$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,求a的取值范围;

(2) 若$f(x)$有两个极值点x_1, x_2,证明:$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$.

21. (12分)

已知函数$f(x)=e^x-3ax^2$.

(1) 若$f(x)$有3个零点,求a的取值范围;

(2) 若$x\geqslant 0$, $a\leqslant\frac{1}{6}$,证明:$f(x)\geqslant ax^3+x+1$.

(二) 选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中,曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),过点$(2,0)$的直线$l$与$C$仅有一个公共点,该公共点在第一象限,以$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求C和l的极坐标方程;

(2) 已知$P(\rho,\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, Q分别为l和C上的动点,且$\angle POQ=90^\circ$,若$\triangle POQ$的面积为1,求θ.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=2|x-1|+|x+1|$.

(1) 解不等式$f(x)\leqslant 4-2x$;

(2) 设$f(x)$的最小值为M,正数a, b满足$a+b=M$,求证:$(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2\geqslant\frac{9}{2}$.