宜宾市高2021级一诊考试文科数学参考答案

说明：

一、本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可比照评分意见制订相应的评分细则.

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半，如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	B	B	C	C	A	A	B	C

二、填空题

13. 1　　14. 3　　15. $3+\sqrt{3}$　　16. $\frac{5}{4}$

三、解答题

(一) 必考题：

17.解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为d，由 $a_2+a_7=9$ 得：

$(a_1+d)+(a_1+6d)=9$　　①

又 $\because$ $S_9=45$

$\therefore$ $a_1+4d=5$　　②

联立①②有 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n$ ……………………………………………………(6分)

(2) 由 (1) 知 $a_n=n$

$\therefore b_n=2^n a_n=n\cdot 2^n$

所以 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，③

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$，④

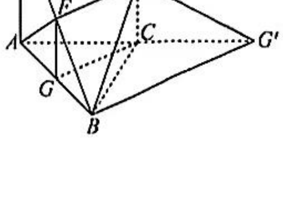
由③－④有 $-T_n=2^1+2^2+3^3+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}=\dfrac{2\times[1-2^n]}{1-2}-n\times 2^{n+1}$，

$=2^{n+1}-2-n\times 2^{n+1}$，

$\therefore -T_n=(1-n)2^{n+1}-2, n\in \mathrm{N}^*$.

$\therefore T_n=2+(n-1)2^{n+1}$ ……………………………………………………(12分)

18.证明：(1) 如图所示，取 AB 中点 G，连 CG、FG.



$\because EF=FB, AG=GB, \therefore FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}EA$

$DC \underline{\parallel} \frac{1}{2}EA, \therefore FG \underline{\parallel} DC$

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 为平行四边形，$\therefore DF \parallel CG$

$\because DF \not\subset$ 平面 ABC，$CG \subset$ 平面 ABC

$\therefore DF \parallel$ 平面 ABC ……………………………(6分)

(2) $\because F$ 是 BE 的中点

$\therefore V_{F-ABD}=V_{D-ABF}=V_{C-ABF}=\frac{1}{2}V_{C-ABE}=\frac{1}{2}V_{E-ABC}$

又 $V_{E-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\times2\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore V_{F-ABD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$……………………………………………………………………………………(12分)

19. (1) 由已知得，样本中有25周岁以上(含25周岁)工人80名，25周岁以下工人40名.

所以样本中日平均生产件数不足80件的工人中，25周岁以上(含25周岁)工人有 $80\times0.05=4$ (名)，记为 A_1, A_2, A_3, A_4;

25周岁以下工人有 $40\times0.05=2$(名)，记为 B_1, B_2.

从中随机抽取2名工人，所有的可能结果共有15种，它们是 (A_1,A_2), (A_1,A_3), (A_1,A_4), (A_1,B_1), (A_1,B_2), (A_2,A_3), (A_2,A_4), (A_2,B_1), (A_2,B_2), (A_3,A_4), (A_3,B_1), (A_3,B_2), (A_4,B_1), (A_4,B_2), (B_1,B_2);

其中，至少有一名25周岁以下工人的可能结果共有9种，它们是 (A_1,B_1), (A_1,B_2), (A_2,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_1), (A_3,B_2), (A_4,B_1), (A_4,B_2), (B_1,B_2);

故所求概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$………………………………………………………………………(6分)

(2) 由题中频率分布直方图可知，在抽取的100名工人中，25周岁以上(含25周岁)的生产能手有 $80\times0.25=20$(名)，25周岁以下的生产能手有 $40\times0.375=15$(名)，据此可得 2×2 列联表如下：

单位:名

	生产能手	非生产能手	合计
25周岁以上	20	60	80
25周岁以下	15	25	40
合计	35	85	120

由列联表中的数据，计算可得统计量 $K^2=\frac{120\times(20\times25-60\times15)^2}{35\times85\times80\times40}\approx2.017<2.706$

所以没有90%的把握认为"生产能手"与"工人所在的年龄组"有关………………………………(12分)

20. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

令 $f'(x)=0$, 则 $x=e$

函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,e)$, 减区间为 $(e,+\infty)$

所以 $x=e$ 时 $f(x)$ 极大值 $=f(e)=\frac{1}{e}$, 无极小值……………………………………………………(5分)

(2) 证明：若证：$f(x)=\frac{\ln x}{x}+1\leqslant e^x-\frac{1}{x}$, 即证 $\ln x+x\leqslant xe^x-1$, 即证 $\ln x+x-xe^x+1\leqslant0$

令 $h(x)=\ln x+x-xe^x+1(x>0)$, 则 $h'(x)=\frac{1}{x}+1-(x+1)e^x=(x+1)\left(\frac{1}{x}-e^x\right)$.

令 $t(x)=\frac{1}{x}-e^x(x>0)$, 则 $t'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$ 恒成立，

所以 $t(x)=\frac{1}{x}-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $t\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$, $t(1)=1-e<0$, 所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $t(x_0)=\frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$t(x)>0$, 则 $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $t(x)<0$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

$h(x)_{\max}=h(x_0)=\ln x_0+x_0-x_0e^{x_0}+1=-x_0+x_0-1+1=0$

$\therefore f(x)\leqslant e^x-\frac{1}{x}$……………………………………………………………………………………(12分)

21.解：(1) 点 P 到 E 的焦点 F 的距离为5，即点 P 到 E 的准线的距离为5，

故 $4+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$.所以 E 的标准方程为 $y^2=4x$；………………………………………(5分)

(2)(i) 由(1)知，$y_0^2=4\times4$，且 $y_0>0$，解得 $y_0=4$，所以 $P(4,4)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-4}{x_1-4}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}=\frac{4}{y_1+4}$，同理可得，$k_{PB}=\frac{4}{y_2+4}$

则 $k_{PA}\times k_{PB}=\frac{4}{y_1+4}\times\frac{4}{y_2+4}=-1$，即 $4(y_1+y_2)+y_1y_2+32=0$.

①当直线 AB 斜率存在时，直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}\left(x-\frac{y_1^2}{4}\right)$

整理得 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$

所以 $4x-32-(y_1+y_2)(y+4)=0$，即 $y+4=\frac{4}{y_1+y_2}(x-8)$

所以直线 AB 过定点 $(8,-4)$；

②当直线 AB 的斜率不存在时 $y_1+y_2=0$，可得 $y_1^2=32$，$x_1=8$.

故直线 AB 过定点 $(8,-4)$.

(ii) 根据题意可知斜率不为0，设直线 AB 斜率为 k，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-8)-4=kx-8k-4$，

与抛物线 E 联立得 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx-8k-4\end{cases}$，

消去 y 得 $k^2x^2-(16k^2+8k+4)x+(8k+4)^2=0$，

因为直线过定点 $(8,-4)$ 可知 $\Delta>0$，所以 $x_1+x_2=\frac{16k^2+8k+4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{(8k+4)^2}{k^2}$.

所以 $|FA|\cdot|FB|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{(8k+4)^2}{k^2}+\frac{16k^2+8k+4}{k^2}+1$

$=\frac{72k+20}{k^2}+81=20\left(\frac{1}{k}+\frac{9}{5}\right)^2+\frac{81}{5}\geqslant\frac{81}{5}$，

所以当 $\frac{1}{k}=-\frac{9}{5}$，$k=-\frac{5}{9}$ 时，$|FA|\cdot|FB|$ 的最小值为 $\frac{81}{5}$；

当直线 AB 斜率不存在时，$x_1=x_2=8$.

由抛物线定义知 $|FA|\cdot|FB|=(x_1+1)(x_2+1)=81$.

故 $|FA|\cdot|FB|$ 的最小值为 $\frac{81}{5}$…………………………………………………………………………(12分)

(二)选考题：

22.解：(1) 将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=x(x\geqslant0)$ 得 $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta$，

所以 $\tan\theta=1$，所以射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\geqslant0)$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $\rho^2\sin^2\theta+\frac{\rho^2\cos^2\theta}{4}=1$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$…………………………………………………………(5分)

(2) 由题意可设点 P 的极坐标为 $\left(\rho_1,\frac{\pi}{4}\right)$，点 Q 的极坐标为 $\left(\rho_2,\frac{3\pi}{4}\right)$，

则 $\rho_1^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，$\rho_2^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，

因为 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，所以 $\rho_1=\rho_2=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，

所以 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}=\dfrac{4}{5}$……………………………………………………………(10分)

23.解：(1) 由题意可得，$f(x)=|2x-1|+|2x+1|=\begin{cases}4x, x>\frac{1}{2}\\ 2, -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ -4x, x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

则 $f(x)\geqslant 3$，即 $\begin{cases}4x\geqslant 3\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2\geqslant 3\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-4x\geqslant 3\\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

解得 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$ 或 $x\in\varnothing$ 或 $x<-\dfrac{3}{4}$，

所以不等式的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\dfrac{3}{4}\text{ 或 }x\geqslant\dfrac{3}{4}\right\}$……………………………………………………………(5分)

(2) 由 (1) 可知，$f(x)_{\min}=2$，所以 $m=2$，则 $a+2b+3c=2$，

即 $a+c+2(b+c)=2$，$\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)[(a+c)+2(b+c)]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2(b+c)}{a+c}+\dfrac{a+c}{b+c}\right)+\dfrac{3}{2}\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{2(b+c)}{a+c}=\dfrac{a+c}{b+c}$，$(a+c)^2=2(b+c)^2$，

即 $a+c=2\sqrt{2}-2$，$b+c=2-\sqrt{2}$ 时，等号成立.

故 $\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)_{\min}=\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$……………………………………………………………(10分)