

泸州市高 2021 级第一次教学质量诊断性考试

数学（文科）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 4, x \in \mathbf{Z}\}$ ， $B = \{x \mid 2x > 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 3\}$

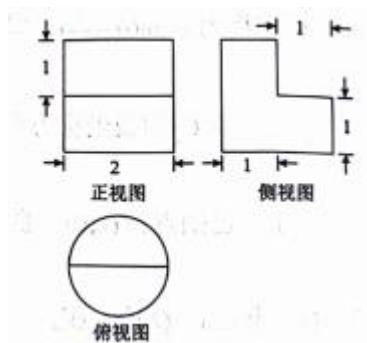
2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, 3^x > 2^x$ ；命题 $q: \exists x_0 \in \mathbf{R}, \ln x_0 = -2$ ，则下列命题是真命题的为

- A. $(\neg p) \wedge q$ B. $p \wedge q$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

3. 若 $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 $\cos 2x =$

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

4. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为



- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{2}$ C. 2π D. 4π

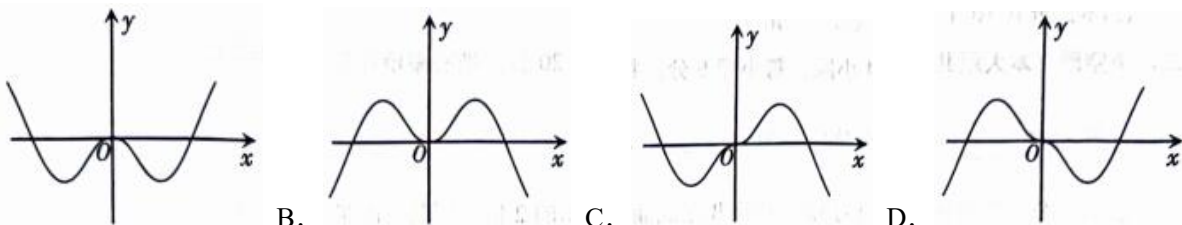
5. “碳中和”是指企业、团体或个人通过植树造林、节能减排等形式，抵消自身产生的二氧化碳排放量，实现二氧化碳“零排放”. 某地区二氧化碳的排放量 S (亿吨) 与时间 t (年) 满足函数关系式 $S = ab^t$, 已知经过 4 年, 该地区二氧化碳的排放量为 $\frac{3a}{4}$ (亿吨). 若该地区通过植树造林、节能减排等形式抵消自身产生的二氧化碳排放量为 $\frac{a}{3}$ (亿吨), 则该地区要实现“碳中和”, 至少需要经过 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$)

A. 13 年 B. 14 年 C. 15 年 D. 16 年

6. “ $\sin(\alpha - \beta) = 0$ ”是“ $\tan \alpha = \tan \beta$ ”的

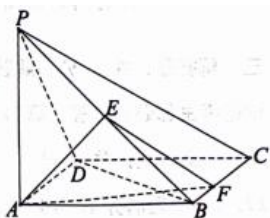
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \cdot \sin x$ 的图象大致为



A. B. C. D.

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB$, E 为线段 PB 的中点, F 为线段 BC 上的动点, 则下列结论一定正确的是



- A. 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC B. 平面 $AEF \perp$ 平面 $ABCD$
C. 直线 $EF \parallel$ 平面 PCD D. 直线 $EF \perp$ 平面 PAB

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且满足 $f(x+2) = f(-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \ln(x+1)$, 则

$$f\left(\frac{2023}{2}\right) =$$

- A. $\ln \frac{1}{2}$ B. $\ln \frac{3}{2}$ C. $\ln \frac{2}{3}$ D. $\ln 2$

10. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 6, $\angle BAD = 60^\circ$, 将 $\triangle BCD$ 沿对角线 BD 翻折, 使点 C 到点 P 处, 且二面角 $A-BD-P$ 为 90° , 则此时三棱锥 $P-ABD$ 的外接球的表面积为

- A. 48π B. $32\sqrt{3}\pi$ C. $20\sqrt{15}\pi$ D. 60π

11. 已知 $f(x) = \begin{cases} ax-1, & (x < a) \\ (x-2)^2, & (x \geq a) \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 a 的最小值为

- A. 0 B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. 1

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值, 且在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 上单调, 则 ω 的取值范围是

- A. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ C. $\left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left[\frac{11}{4}, \frac{17}{3}\right]$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

注意事项:

(1) 非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上, 作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚, 答在试题卷和草稿纸上无效.

(2) 本部分共 10 个小题, 共 90 分.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题纸上).

13. 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 的对称中心为_____.

14. 已知一个圆锥的体积为 3π , 侧面积是底面积的 2 倍, 则其底面半径为_____.

15. 写出“使函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增”的实数 a 的一个值_____.

16. 过点 $(0, m)$ 有两条直线与曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln x$ 相切, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 将函数 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象, 若 $g\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{2}{7}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin \theta$

的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $x = \frac{3}{2}$ 是函数 $f(x) = x^2 - 11x + a \ln x$ 的极值点.

(I) 求 a 的值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $(1, c)$ 上存在最小值, 求 c 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $12b\sin B = c\sin A\cos B + a\sin B\cos C$.

(I) 求 $\frac{a}{b}$ 的值;

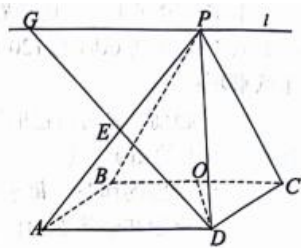
(II) 若 $a = 6$, AD 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线, 且 $AD = CD$, 求 $\cos C$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 且平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$. O, E 分别是 BC, PA 的中点, 经过 O, D, E 三点的平面与棱 PB 交于点 F , 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$, 直线 DE 与直线 l 交于点 G .

(I) 求 $\frac{PF}{FB}$ 的值;

(II) 若 $PB = PC = CD = 2$, 求多面体 $POCDEF$ 的体积.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \tan x - ax$.

(I) 若 $a > 1$, 证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) > 0$;

(II) 若函数 $g(x) = f(x) + \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有三个零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 曲线 } C_2: \begin{cases} x = 1 + \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}).$$

(I) 求 C_2 的极坐标方程;

(II) 已知点 $M(2, 0)$, 曲线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$, C_3 与 C_1 的交点为 P , 与 C_2 的交点为 O, Q , 求

$\triangle MPQ$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x| + |x-2| - 1$.

(I) 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(II) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 m , 且 $a+b=m$ ($a>0, b>0$). 求证: $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$.