理科数学

（考试时间：120分钟　　全卷满分：150分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求

1．设集合 $A=\{x|x^2+3x-10<0\}$，$B=\{x|-3<x<3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x|-3<x<2\}$　B．$\{x|-5<x<2\}$　C．$\{x|-3<x<3\}$　D．$\{x|-5<x<3\}$

2．已知i为虚数单位，且 $z=\dfrac{2i}{1+i^3}$，则 $z=$

A．$1-i$　B．$1+i$　C．$-1+i$　D．$-1-i$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(2-x)\ (x<1)\\ 3^{x+1}(x\geqslant 1)\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_3 8)=$

A．8　B．9　C．22　D．26

4．$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ 的二项式展开式中 x 的系数为

A．560　B．35　C．-35　D．-560

5．已知点 (x,y) 满足不等式组 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值为

A．-3　B．-1　C．5　D．7

6．华为在过去几年面临了来自美国政府的封锁和限制，但华为并没有放弃，在自主研发和国内供应链的支持下，成功突破了封锁，实现了5G功能.某手机商城统计了最近5个月华为手机的实际销量，如下表所示：

时间 x(月)	1	2	3	4	5
销售量 y(万部)	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若 y 与 x 线性相关，且线性回归方程为 $\hat{y}=0.24x+\hat{a}$，则下列说法不正确的是

A．样本中心点为 $(3,1.0)$

B．由表中数据可知，变量 y 与 x 呈正相关

C．$\hat{a}=0.28$

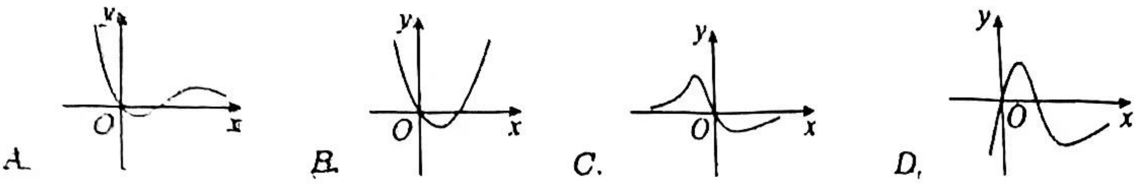
D．预测 $x=7$ 时华为手机销量约为1.96(万部)

已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，$S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$，则

A．数列$\{a_n\}$是等比数列　　　　B．数列$\{a_n\}$是等差数列

C．数列$\{S_n\}$是等比数列　　　　D．数列$\{S_n\}$是等差数列

函数$f(x)=\frac{x^2-4x}{e^x}$的图象大致是



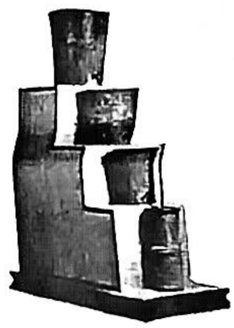
将函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图像向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度后得到曲线$C$，若$C$关于原点对称，则$\omega$的最小值是

$\frac{2}{3}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．$\frac{5}{3}$　　　　D．$\frac{11}{3}$

．某校举办中学生乒乓球运动会，高一年级初步推选3名女生和4名男生参赛，并从中随机选取3人组成代表队参赛．在代表队中既有男生又有女生的条件下，女生甲被选中的概率为

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{7}{15}$　　　　C．$\frac{7}{13}$　　　　D．$\frac{11}{15}$

．漏刻是中国古代科学家发明的一种计时系统，“漏”是指带孔的壶，“刻”是指附有刻度的浮箭．《说文解字》中记载：“漏以铜壶盛水，刻节，昼夜百刻．”某展览馆根据史书记载，复原唐代四级漏壶计时器．如图，计时器由三个圆台形漏水壶和一个圆柱形受水壶组成，水从最上层的漏壶孔流出，最终全部均匀流入受水壶．当最上层漏水壶盛满水时，漂浮在最底层受水壶中的浮箭刻度为0，当最上层漏水壶中水全部漏完时，漂浮在最底层受水壶中的浮箭刻度为100．已知最上层漏水壶口径与底径之比为5∶2，则当最上层漏水壶水面下降至其高度的三分之一时，浮箭刻度约为（四舍五入精确到个位）



A．88　　　　B．84　　　　C．78　　　　D．72

2．已知函数$f(x)$、$g(x)$的定义域为R，$g(x)$的图像关于$x=1$对称，且$g(2x+2)$为奇函数，$g(1)=1$，$f(x)=g(3-x)+1$，则下列说法正确的个数为

①$g(-3)=g(5)$　　②$g(2024)=0$　　③$f(2)+f(4)=-4$　　④$\sum_{n=1}^{2024}f(n)=2024$

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

二、填空题：本大题共4个小题，每小题5分，共20分．

3．若函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax-2\ln x$在$x=1$处的切线平行于$x$轴，则$a=$ __________．

14．已知$\overrightarrow{AC}=(2,1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,t)$，且$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=3$，则$t=$ __________．

15．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\frac{2\pi}{3}$，集合$S=\{\cos a_n|n\in N^*\}$，若$S=\{a,b\}$，则$a^2+b^2=$__________．

16．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长[illegible]的中点，则三棱锥$P-BDD_1$外接球的表面积为

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17－21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

(一) 必做题：共 60 分．

17．(12 分)

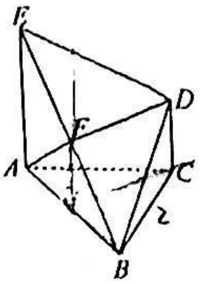
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_3+a_7=9$，$S_9=45$．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=2^n a_n$，求数列 的前 n 项和 T_n．

18．(12 分)

如图所示，ΔABC 是正三角形，$AE\perp$ 平面 ABC，$AE\,/\!/\,CD$，$AE=AB=2$，$CD=1$，且 F 为 BE 的中点．



(1) 求证：$DF\,/\!/$ 平面 ABC；

(2) 求平面 BDE 与平面 ABC 所成二面角的正弦值．

19．(12 分)

自 1996 年起，我国确定每年 3 月份最后一周的星期一为全国中小学生"安全教育日"．我国设立这一制度是为全面深入地推动中小学生安全教育工作，大力降低各类伤亡事故的发生率，切实做好中小学生的安全保护工作，促进他们健康成长．为了迎接"安全教育日"，某市将组织中学生进行一次安全知识有奖竞赛，竞赛奖励规则如下，得分在 $[70,80)$ 内的学生获三等奖，得分在 $[80,90)$ 内的学生获二等奖，得分在 $[90,100]$ 内的学生获一等奖，其他学生不获奖．为了解学生对相关知识的掌握情况，随机抽取 100 名学生的竞赛成绩，统计如下：

成绩(分)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	6	12	18	24	18	12	10

(1) 若现从该样本中随机抽取两名学生的竞赛成绩，求这两名学生中恰有一名学生获一等奖的概率；

(2) 若该市所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $X\sim N(65,100)$，利用所得正态分布模型解决以下问题：

(i) 若该市共有 10000 名学生参加了竞赛，试估计参赛学生中成绩超过 85 分的学生数(结果四舍五入到整数)；

(ii) 若从所有参赛学生中(参赛学生数大于 100000)随机抽取 4 名学生进行访谈，设其中竞赛成绩在 65 分以上的学生数为 Y，求随机变量 Y 的分布列及数学期望．

附参考数据：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则：

$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$．

20. (12分)

已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$，$P(4,y_0)(y_0>0)$为E上一点，P到E的焦点F的距离为5.

(1) 求E的标准方程；

(2) 设O为坐标原点，A，B为抛物线E上异于P的两点，且满足$PA\perp PB$. 判断直线AB是否过定点，若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

21. (12分)

已知$f(x)=x-x\ln x-1$，记$f(x)$在$x=\frac{1}{e}$处的切线方程为$g(x)$.

(1) 证明:$g(x)\geqslant f(x)$；

(2) 若方程$f(x)=m$有两个不相等的实根$x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1-x_2>2m+2-e-\frac{1}{e}$.

(二) 选做题:共10分.请考生在第22、23题中选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修4－4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系xOy中，射线l的方程为$y=x(x\geqslant 0)$，曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，以坐标原点为极点，x轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求射线l和曲线C的极坐标方程；

(2) 若射线l与曲线C交于点P，将射线OP绕极点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$交C于点Q，求$\triangle POQ$的面积.

23. (10分) [选修4－5:不等式选讲]

已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$.

(1) 求不等式$f(x)\geqslant 3$的解集；

(2) 记函数$f(x)$的最小值为m，若a,b,c均为正实数，且$a+2b+3c=m$，求$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$的最小值.