绵阳市高中 2021 级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BBCAD　BACBC　BC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．7　　14．$\sqrt{5}$　　15．$[-1,+\infty)$　　16．1

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17．解：（1）由 S_1，$2S_2$，$3S_3$ 成等差数列，则 $4S_2=S_1+3S_3$，得 $3a_3=a_2$，……………3 分

$\therefore$数列$\{a_n\}$的公比 $q=\frac{1}{3}$，……………………………………………………4 分

由 $a_1=27$，数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3^{4-n}$；……………………………6 分

（2）令 $b_n=\log_3 a_n$，则 $b_n=\log_3 3^{4-n}=4-n$，…………………………………8 分

$\therefore$当 $n\le 4$ 时，$b_n\ge 0$，……………………………………………………………9 分

$\therefore$当 $n=3$ 或 4 时，T_n 取得最大值：$T_3=T_4=3+2+1=6$. ……………………12 分

18．解：（1）$\because f(\frac{\pi}{3})=\tan(\frac{\pi}{8}+\varphi)=1$，

$\therefore \varphi+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}+k\pi$，而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，………………………………………………2 分

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{8}$，即 $f(x)=\tan(\frac{3}{8}x+\frac{\pi}{8})$，………………………………………3 分

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{8\pi}{3}$；………………………………………4 分

（2）由题意，$g(x)=\tan(\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\lambda+\frac{\pi}{8})$，……………………………………5 分

$\because -f(0)=-\tan\frac{\pi}{8}=\tan(-\frac{\pi}{8})$，

$\therefore$由$g(\frac{\pi}{4})=-f(0)$，得$\tan(\frac{3\pi}{32}+\frac{3}{8}\lambda+\frac{\pi}{8})=\tan(-\frac{\pi}{8})$，……………………7 分

$\therefore \frac{3}{8}\lambda+\frac{7\pi}{32}=-\frac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，………………………………………………9 分

$\therefore \lambda=-\frac{11}{12}\pi+\frac{8k\pi}{3}$，$k\in Z$，又$\lambda>0$，……………………………………10 分

$\therefore\lambda$ 的最小值为 $\dfrac{7\pi}{4}$． ……………………………………………………… 12 分

19．解：（1）$\because$ $f(x)=(2x^2+m)(x-m+2)=2x^3-2(m-2)x^2+mx-m(m-2)$ 为奇函数，

$\therefore\begin{cases}-2(m-2)=0\\-m(m-2)=0\end{cases}$，解得：$m=2$． ……………………………………… 5 分

（2）当 $m>0$ 时，$2x^2+m>0$ ，

$\therefore$函数 $f(x)=(2x^2+m)(x-m+2)$ 不可能有两个零点． ……………………… 6 分

当 $m<0$ 时，由 $f(x)=0$，解得：$x=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{2}}$ 或 $m-2$， ……………………… 7 分

要使得 $f(x)$仅有两个零点，则 $m-2=-\sqrt{-\dfrac{m}{2}}$ ， ……………………………… 8 分

即 $2m^2-7m+8=0$，此方程无解．

故 $m=0$，即 $f(x)=2x^3+4x^2$ ， ……………………………………………………… 9 分

令 $h(x)=f(x)-3=2x^3+4x^2-3$，则 $h'(x)=6x^2+8x=2x(3x+4)$，

$h'(x)>0$，解得：$x>0$ 或 $x<-\dfrac{4}{3}$，$h'(x)<0$ 解得：$-\dfrac{4}{3}<x<0$，

故 $h(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{4}{3})$，$(0,+\infty)$ 上递增，在 $(-\dfrac{4}{3},0)$ 上递减， ……………………… 10 分

又 $h(-\dfrac{4}{3})=-\dfrac{17}{27}<0$，

故函数 $y=f(x)-3$ 仅有一个零点． ……………………………………………… 12 分

20．解：（1）$\because\cos(C-B)\sin A=\cos(C-A)\sin B$

$\therefore(\cos C\cos B+\sin C\sin B)\sin A=(\cos C\cos A+\sin C\sin A)\sin B$ ……………………… 2 分

$\therefore\cos C\cos B\sin A=\cos C\cos A\sin B$ …………………………………………………… 3 分

又$\because$ $\triangle ABC$ 为斜三角形，则 $\cos C\neq0$，

$\therefore\cos B\sin A=\cos A\sin B$， …………………………………………………… 5 分

$\therefore\sin(A-B)=0$，又 A，B 为$\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore A=B$； ……………………………………………………………………… 6 分

（2）在$\triangle ABC$ 中，由（1）知，$a=b$，

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，则 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sin C}{c\sin B}$， ………………………………………… 7 分

又 $\dfrac{1}{c}=\sin B$，即 $c\sin B=1$，

∴ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\sin C=\sin(A+B)=\sin 2B$，

∴ $\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}==\sin^2B-\sin^2 2B$， ……………………………………………………… 9 分

∴ $\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}=\sin^2B-\sin^2 2B=\sin^2B-4\cos^2B\sin^2B=\sin^2B-4(1-\sin^2B)\sin^2B$， ………… 10 分

令 $\sin^2B=t$，令 $f(t)=t-4(1-t)t=4t^2-3t$， ………………………………………………… 11 分

又因为 $0<\sin^2B<1$，即 $0<t<1$，

∴当 $t=\dfrac{3}{8}$ 时，$f(t)$取最小值，且 $f(t)_{min}=-\dfrac{9}{16}$，

综上所述：$\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}$ 的最小值为 $-\dfrac{9}{16}$． ………………………………………………… 12 分

21．**解：**（1）**方法一：** $f'(x)=e^{x-1}-x^2+ax-a$， ……………………………………………… 1 分

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

故：当 $x>1$时，$a\geqslant\dfrac{x^2-e^{x-1}}{x-1}$ 恒成立． ………………………………………………… 3 分

设 $g(x)=\dfrac{x^2-e^{x-1}}{x-1}(x>1)$，则 $a\geqslant g_{\max}(x)$，

则 $g'(x)=\dfrac{-(x-2)(e^{x-1}-x)}{(x-1)^2}$，

易知 $e^x\geq x+1$，所以 $e^{x-1}\geq x$，

故令 $g'(x)>0$ 得到：　$1<x<2$；令 $g'(x)<0$ 得到：　$x>2$．

∴ $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上递减；在 $(1,\ 2)$ 上递增． ………………………………………… 5 分

故：当 $x>1$时，$g_{\max}(x)=g(2)=4-e$．

∴实数 a 的取值范围：$a\geqslant 4-e$． ………………………………………………………… 6 分

方法二： $f'(x)=e^{x-1}-x^2+ax-a$，

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

等价于：$\dfrac{x^2-ax+a}{e^{x-1}}-1\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，………………………………… 2 分

设 $g(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{e^{x-1}}-1(x>1)$，则 $g_{max}(x)\leqslant 0$，

$g'(x)=\dfrac{-(x-a)(x-2)}{e^{x-1}}$，

当 $a=2$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，$g_{max}(x)=g(1)=0$，符合题意． ………………………… 3 分

当 $a>2$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上递减，在 $(2,a)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，

因为 $g(1)=0$，

故只需满足 $g(a)=\dfrac{a}{e^{a-1}}-1\leq 0$（由 $e^x\geq x+1$ 易得），符合题意． ……………… 4 分

当 $1<a<2$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(1,a)$ 上递减，在 $(a,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，

因为 $g(1)=0$，故只需满足 $g(2)=\dfrac{4-a}{e}-1\leq 0$，即 $4-e\leq a<2$，

当 $a\leq 1$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减， …………………… 5 分

$g_{max}(x)=g(2)=\dfrac{4-a}{e}-1>0$，不符合题意．

综上：实数 a 的取值范围：$a\geqslant 4-e$． ……………………………………………… 6 分

（2）$f(x)$ 的极值点个数等价于 $f'(x)$ 的变号零点个数，

令 $g(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{e^{x-1}}-1$，则等价于 $g(x)$ 的变号零点个数， ………………………… 7 分

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-1$，

由（1）可知 $g'(x)=\dfrac{-(x-a)(x-2)}{e^{x-1}}$，$g(1)=0$，

当 $a=2$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减，故 $g(x)$ 有唯一变号零点 1； …… 8 分

当 $a>2$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上递减，在 $(2,a)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，

因为 $g(2)<g(1)=0$，$g(a)=\dfrac{a}{e^{a-1}}-1\leq 0$，故 $g(x)$ 有唯一变号零点 1；

当 $a<2$ 且 $a\neq 1$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上递减，在 $(a,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，

……………………………………………………………………………………………… 9 分

$g(a)=\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a-1}}-1<0$， $g(2)=\dfrac{4-a}{\mathrm{e}}-1$，

若 $g(2)\leqslant 0$，即 $4-\mathrm{e}\leqslant a<2$ 时，有唯一变号零点 1； ……………………………… 10 分

若 $g(2)>0$，即 $a<4-e$ 且 $a\neq 1$ 时， $g(x)$ 有三个变号零点 1， x_2， x_3，

且 $1<x_2<2<x_3$。

当 $a=1$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递减，

在(1，2)上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减， ……………………………………………………… 11 分

由于 $g(1)=0$， $g(2)=\dfrac{3}{\mathrm{e}}-1>0$， $g(x)$ 有唯一变号零点 x_0，且 $x_0>2$.

综上：当 $a<4-e$ 且 $a\neq 1$ 时， $f(x)$ 有三个极值点；

当 $a=1$ 或 $a\geqslant 4-\mathrm{e}$ 时， $f(x)$ 有唯一极值点. ……………………………………… 12 分

22．**解**：（1）曲线 C_1 的参数方程为 C_1：$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} ① \\ y=t-\dfrac{1}{t} ② \end{cases}$ （t 为参数），

由 $①^2-②^2$ 得 C_1 的普通方程为： $x^2-y^2=4$； …………………………………… 2 分

曲线 C_2 的参数方程为 C_2：$\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$ （α 为参数），

所以 C_2 的普通方程为： $(x-2)^2+y^2=4$； ……………………………………………… 4 分

（2）曲线 C_1 的极坐标方程为： $\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=4\ (\theta\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2})$， ………… 5 分

$\therefore \rho^2=\dfrac{4}{\cos 2\theta}$， ………………………………………………………………………… 6 分

由 $\begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{6} \\ \rho^2=\dfrac{4}{\cos 2\theta} \end{cases}$ 得： $\rho_A=2\sqrt{2}$，

∴射线： $\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho>0)$ 与曲线 C_1 交于 $A(2\sqrt{2},\dfrac{\pi}{6})$， ……………………………… 7 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0\Rightarrow\rho=4\cos\theta$，

由$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6},\\ \rho=4\cos\theta,\end{cases}$ 得：$\rho_B=2\sqrt{3}$，

∴射线：$\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho>0)$与曲线 C_2 交于 $B(2\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6})$， ……………………………… 9 分

则 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle POB}-S_{\triangle POA}=\dfrac{1}{2}\times|OP|\times(\rho_B-\rho_A)\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$． ………………… 10 分

23．**解**：（1） $f(x)=|3x+3|-|x-5|=\begin{cases}2x+8,\ x\geq 5,\\ 4x-2,-1<x<5,\\ -2x-8,\ x\leq -1,\end{cases}$ ……………………………… 1 分

∴ $f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 5\\ 2x+8>0\end{cases}$或$\begin{cases}-1<x<5\\ 4x-2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x\leq -1\\ -2x-8>0\end{cases}$， ………………………… 2 分

解得 $x\geq 5$或$\dfrac{1}{2}<x<5$或$x<-4$， ……………………………………………………………… 4 分

∴不等式的解集为$(-\infty,-4)\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$； ……………………………………………… 5 分

（2）证明：由 $f(x)=\begin{cases}2x+8,x\geq 5\\ 4x-2,-1<x<5\\ -2x-8,x\leq -1\end{cases}$，可得 $f(x)$ 的最小值为-6， …………… 6 分

则 $m=-6$， $a+b+c=6$，

$$\therefore\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{12}[(a+b)+(b+c)+(c+a)](\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

$=\dfrac{1}{12}(3+\dfrac{b+c}{a+b}+\dfrac{c+a}{a+b}+\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{c+a}{b+c}+\dfrac{a+b}{c+a}+\dfrac{b+c}{c+a})$ ……………………………… 7 分

$\geqslant\dfrac{1}{12}(3+2\sqrt{\dfrac{b+c}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{b+c}}+2\sqrt{\dfrac{c+a}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{c+a}}+2\sqrt{\dfrac{c+a}{b+c}\cdot\dfrac{b+c}{c+a}}$ ………………………… 8 分

$=\dfrac{1}{12}(3+2+2+2)=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$，当且仅当$a=b=c=2$时，等号成立， …………… 9 分

∴ $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{3}{4}$． ……………………………………………………… 10 分