成都七中高 2024 届高三上入学考试数学试题　理科

一、单选题

CACAD　CDBBA　AB

二、填空题

13. $\forall x\in\mathbf{R},e^{x}-x-1>0$　　14. $\frac{6}{7}$　　15．4　　16．1

三、解答题

17.【答案】(1) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

【详解】(1) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1F}-\overrightarrow{D_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{D_1B}-\frac{3}{4}\overrightarrow{D_1A}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$；

（2）设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$($\lambda$，$\mu$不为0)，

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{D_1G}-\overrightarrow{D_1E}=k\overrightarrow{D_1C}-k\overrightarrow{D_1A}=k\overrightarrow{AC}$

$=k(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD})=k\lambda\overrightarrow{AB}+k\mu\overrightarrow{AD}=k\lambda(\overrightarrow{D_1B}-\overrightarrow{D_1A})+\mu k(\overrightarrow{D_1D}-\overrightarrow{D_1A})$

$=\lambda(\overrightarrow{D_1F}-\overrightarrow{DE})+\mu(\overrightarrow{D_1H}-\overrightarrow{D_1E})=\lambda\overrightarrow{EF}+\mu\overrightarrow{EH}$

则 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{EH}$ 共面且有公共点 E，则 E,F,G,H 四点共面；

18.【答案】(1) $p=q=0.3$ (2)分布列见解析；期望为7.4

【详解】（1）解：分别记"甲租用时间不超过 30 钟、$30\sim40$ 分钟、$40\sim50$ 分钟"为事件 A_1,A_2,A_3，它们彼此互斥，则 $P(A_1)=0.4,P(A_2)=p,P(A_3)=q$，且 $p+q=0.6$①；

分别记"乙租用时间不超过 30 钟、$30\sim40$ 分钟、$40\sim50$ 分钟"为事件 B_1,B_2,B_3，则

$P(B_1)=0.5,P(B_2)=0.2,P(B_3)=0.3$，且 A_1,A_2,A_3 与 B_1,B_2,B_3 相互独立.

记"甲、乙租用时间相同"为事件 C，

则 $P(C)=P(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)$

$=0.4\times0.5+0.2p+0.3q=0.35\Rightarrow2p+3q=1.5$②

由①②解得：$p=q=0.3$

（2）解：X 可能取值为 $4,6,8,10,12$，

$P(X=4)=0.4\times0.5=0.2$，$P(X=6)=0.4\times0.2+0.3\times0.5=0.23$，

$P(X=8)=0.4\times0.3+0.5\times0.3+0.3\times0.2=0.33$，

$P(X=10)=0.3\times0.3+0.3\times0.2=0.15$，$P(X=12)=0.3\times0.3=0.09$

所以 X 的分布表如下：

X	4	6	8	10	12
P	0.2	0.23	0.33	0.15	0.09

所以 $E(X)=4\times0.2+6\times0.23+8\times0.33+10\times0.15+12\times0.09=7.4$

19.【答案】(1) $a_n=n$ (2) $a_1\ge2$

【详解】（1）由题意得 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 为公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

则 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，即 $2S_n=(n+1)a_n,2S_{n-1}=na_{n-1}(n\ge2)$，

两式作差得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$ 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\ge2)$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{1}$，

即 $\frac{a_n}{a_1}=n$，$a_n=n(n\ge2)$，因为 $a_1=1$，所以 $a_n=n$.

（2）由题知，$S_n=\frac{(a_1+na_1)\cdot n}{2}$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{a_1}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{a_1}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\frac{2}{a_1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{2}{a_1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{a_1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，

当 $n\to+\infty$ 时，有 $\frac{2}{a_1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\to\frac{2}{a_1}$，

因为 $a_1>0$，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}<1$ 恒成立等价于 $\frac{2}{a_1}\le1$，从而 $a_1\ge2$.

20.【答案】(1) $a=\frac{1}{1-\ln2}$ (2) $[2\ln2-3,+\infty)$

【详解】（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=a\ln x-ax+1$，得 $f'(x)=\frac{a}{x}-a$，则 $f'(2)=\frac{a}{2}-a=-\frac{a}{2}$，

因为经过点 $(0,0)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图像相切于点 $(2,f(2))$，所以 $k=\frac{f(2)}{2}=-\frac{a}{2}$，

所以 $a\ln2-2a+1=-a$，解得 $a=\frac{1}{1-\ln2}$，

（2） $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1=a\ln x-ax+\frac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=\frac{a}{x}-a+x=\frac{x^2-ax+a}{x}(x>0)$，

因为 $g(x)$ 有两个极值点为 x_1，$x_2(x_1\ne x_2)$，所以 $g'(x)=\frac{x^2-ax+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

此时方程 $x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

则 $\Delta=a^2-4a>0$，且 $x_1+x_2=a>0,x_1x_2=a>0$，解得 $a>4$，

若不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，则 $\lambda>\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}$ 恒成立，

因为 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1-x_1)+\frac{1}{2}x_1^2+a(\ln x_2-x_2)+\frac{1}{2}x_2^2=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$

不妨设 $h(a)=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\frac{a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a}{a}=\ln a-\frac{1}{2}a-1(a>4)$，

则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=\frac{2-a}{2a}$，因为 $a>4$，所以 $h'(a)<0$，

所以 $h(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上递减，所以 $h(a)<h(4)=2\ln 2-3$，所以 $\lambda\geq 2\ln 2-3$，

即实数 λ 的取值范围为 $[2\ln 2-3,+\infty)$.

21．【答案】(1) $E:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　（2）直线 AD 过定点 $\left(-\frac{4}{3},0\right)$

【详解】（1）设 $F(-c,0)$，由 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，则 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=2$，即 $a=b$，所以渐近线方程为 $y=\pm x$.

又 F 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则 $\frac{c}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

即 $c=2$，$a=b=\sqrt{2}$. 所以双曲线方程为 $E:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

（2）设 $B(x_0,y_0)$，$C(-x_0,-y_0)$，直线 FB 的方程为 $x=\frac{x_0+2}{y_0}y-2$，

直线 FB 的方程与双曲线 $E:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 联立，

$$\left(\frac{(x_0+2)^2}{y_0^2}-1\right)y^2-\frac{4(x_0+2)}{y_0}y+2=0.$$

又 $x_0^2-y_0^2=2$，则 $(2x_0+3)y^2-2(x_0+2)y_0y+y_0^2=0$

所以 $y_0y_A=\frac{y_0^2}{2x_0+3}$，即 $y_A=\frac{y_0}{2x_0+3}$，$x_A=\frac{-3x_0-4}{2x_0+3}$. 同理 $y_D=\frac{-y_0}{-2x_0+3}$，$x_D=\frac{3x_0-4}{-2x_0+3}$，

则 $k_{AD}=\dfrac{\frac{y_0}{2x_0+3}-\frac{-y_0}{-2x_0+3}}{\frac{-3x_0-4}{2x_0+3}-\frac{3x_0-4}{-2x_0+3}}=\frac{y_0(-2x_0+3)+y_0(2x_0+3)}{(-3x_0-4)(-2x_0+3)-(3x_0-4)(2x_0+3)}=-\frac{3y_0}{x_0}$，

则直线 AD 方程为 $y-\frac{y_0}{2x_0+3}=-3\frac{y_0}{x_0}\left(x-\frac{-3x_0-4}{2x_0+3}\right)$，

令 $y=0$，则 $\frac{1}{2x_0+3}=\frac{3}{x_0}\left(x-\frac{-3x_0-4}{2x_0+3}\right)$，即 $x=\frac{x_0}{3(2x_0+3)}+\frac{-3x_0-4}{2x_0+3}=\frac{-4(2x_0+3)}{3(2x_0+3)}=-\frac{4}{3}$

所以直线 AD 过定点 $\left(-\frac{4}{3},0\right)$.

22.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1\left(x\neq -2\right)$；

当$\cos\alpha\neq 0$时，直线l的直角坐标方程为$y=x\tan\alpha+2+\tan\alpha$，

当$\cos\alpha=0$时，直线l的参数方程为$x=-1$.

(2)45°

【详解】（1）由$\begin{cases}x=\frac{2-2s^2}{1+s^2},\\ y=\frac{4\sqrt{2}s}{1+s^2}.\end{cases}$得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=\frac{\left(1-s^2\right)^2}{\left(1+s^2\right)^2}+\frac{\left(2s\right)^2}{\left(1+s^2\right)^2}=1$，而$x=\frac{4}{1+s^2}-2>-2$，

即曲线C的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1\left(x\neq -2\right)$，

由$\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），

当$\cos\alpha\neq 0$时，消去参数t，可得直线l的直角坐标方程为$y=x\tan\alpha+2+\tan\alpha$，

当$\cos\alpha=0$时，可得直线l的参数方程为$x=-1$.

（2）将直线l的参数方程代入曲线C的直角坐标方程，

整理可得：$(1+\cos^2\alpha)t^2+4(\sin\alpha-\cos\alpha)t-2=0$．①

$\because$曲线C截直线l所得线段的中点$(-1,2)$在椭圆内，则方程①有两解，设为t_1，t_2，

则$t_1+t_2=\frac{4\cos\alpha-4\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}=0$，故$\cos\alpha-\sin\alpha=0$，解得$\tan\alpha=1$．$\therefore l$的倾斜角$\alpha$为$45^\circ$．

23.【答案】(1)3　(2)$(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

【详解】（1）$a>0,b>0,c>0$，则$a^3+b^3+1^3\geq 3a\cdot b\cdot 1=3ab$，

$b^3+c^3+1^3\geq 3b\cdot c\cdot 1=3bc$ $c^3+a^3+1^3\geq 3c\cdot a\cdot 1=3ca$，

则$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\times 1^3\geq 3\left(ab+bc+ca\right)=9$，所以$a^3+b^3+c^3\geq 3$，

当且仅当$a=b=c=1$时等号成立，$a^3+b^3+c^3$的最小值为$M=3$.

（2）$\left|x-m\right|-\left|x+1\right|\leq\left|(x-m)-(x+1)\right|\leq\left|m+1\right|$，

当且仅当$(x-m)(x+1)\geq 0$且$|x-m|\geq|x+1|$时取最大值$|m+1|$.

$y=|x-m|-|x+1|$的最大值为$|m+1|>3$，解得$m\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.