

## 成都七中高 2024 届高三上入学考试数学试题 理科

### 一、单选题（60 分）

1. 设集合  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x \in A \text{ 且 } -x \in A\}$ , 则集合  $B$  中元素的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

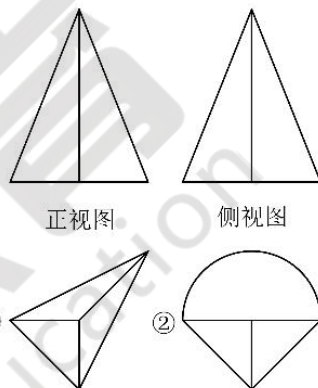
2. 欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  (其中  $i$  是虚数单位,  $e$  是自然对数的底数) 是数学中的一个神奇公式. 根据欧拉公式, 复数  $z = e^i$  在复平面上所对应的点在 ( )

- A. 第一象限              B. 第二象限              C. 第三象限              D. 第四象限

3. 椭圆  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦距是 2, 则  $m$  的值为 ( )

- A. 8                      B. 5                      C. 5 或 3                      D. 8 或 5

4. 某几何体的正视图与侧视图如图所示: 则下列两个图形①②中, 可能是其俯视图的是

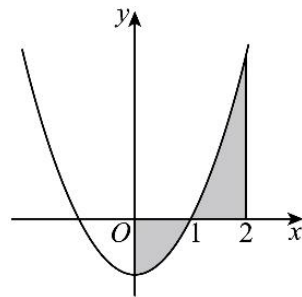


- A. ①② 都可能                      B. ① 可能, ② 不可能  
C. ① 不可能, ② 可能                      D. ①② 都不可能

5. 已知幂函数  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  ( $m, n \in \mathbf{Z}$ ), 下列能成为“ $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上奇函数”充分条件的是 ( )

- A.  $m = -3, n = 1$                       B.  $m = 1, n = 2$   
C.  $m = 2, n = 3$                       D.  $m = 1, n = 3$

6. 如图所示, 图中曲线方程为  $y = x^2 - 1$ , 用定积分表达围成封闭图形 (阴影部分) 的面积是 ( )



- A.  $\left| \int_0^2 (x^2 - 1) dx \right|$                       B.  $\int_0^2 (x^2 - 1) dx$   
C.  $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$                       D.  $\int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

7. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  是两个非零向量, 设  $\overline{AB} = \vec{a}, \overline{CD} = \vec{b}$ . 给出定义: 经过  $\overline{AB}$  的起点  $A$  和终点  $B$ , 分别作  $\overline{CD}$  所在直线的垂线, 垂足分别为  $A_1, B_1$ , 则称向量  $\overline{A_1B_1}$  为  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影向量. 已知  $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影向量为 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$     B.  $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$     C.  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$     D.  $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

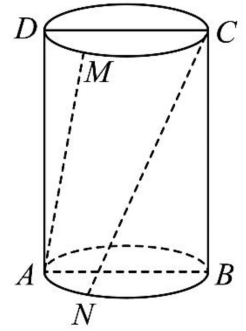
8. 已知  $X \sim B(n, p)$ , 若  $4P(X = 2) = 3P(X = 3)$ , 则  $p$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{5}{6}$                       B.  $\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $\frac{2}{3}$

9. 如图，圆柱的轴截面为矩形  $ABCD$ ，点  $M, N$  分别在上、下底面圆上， $\widehat{NB} = 2\widehat{AN}$ ，

$\widehat{CM} = 2\widehat{DM}$ ， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，则异面直线  $AM$  与  $CN$  所成角的余弦值为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{30}}{10}$       B.  $\frac{3\sqrt{30}}{20}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$



10. 若  $\frac{1}{2}\log_3 a + 3^a - 1 = \log_9 b + 9^b$ ，则 ( )

- A.  $a > 2b$       B.  $a < 2b$       C.  $a > b^2$       D.  $a < b^2$

11. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今还在农业生产

中得到使用(图1).明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理(图2).假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水桶都做逆时针匀速圆周运动，筒车转轮的中心  $O$  到水面的距离  $h$  为  $1.5\text{m}$ ，

筒车的半径  $r$  为  $2.5\text{m}$ ，筒车转动的角速度  $\omega$  为  $\frac{\pi}{12}\text{rad/s}$ ，如图3所示，盛水桶  $M$  (视为质点) 的初始位置  $P_0$  距

水面的距离为  $3\text{m}$ ，则  $3\text{s}$  后盛水桶  $M$  到水面的距离近似为  $(\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732)$  ( )



图1



图2

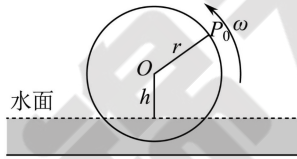
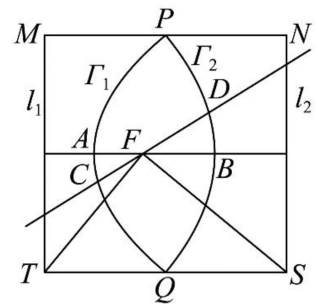


图3

- A.  $4.0\text{m}$       B.  $3.8\text{m}$       C.  $2.5\text{m}$       D.  $2.4\text{m}$

12. 如图抛物线  $\Gamma_1$  的顶点为  $A$ ，焦点为  $F$ ，准线为  $l_1$ ，焦距为  $4$ ；抛物线  $\Gamma_2$  的顶点为  $B$ ，焦点也为  $F$ ，准线为  $l_2$ ，焦距为  $6$ 。  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  交于  $P, Q$  两点，分别过  $P, Q$  作直线与两准线垂直，垂足分别为  $M, N, S, T$ ，过  $F$  的直线与封闭曲线  $APBQ$  交于  $C, D$  两点，

则下列说法正确的是 ( )



- ①  $|AB| = 5$       ② 四边形  $MNST$  的面积为  $100$

- ③  $\overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$       ④  $|CD|$  的取值范围为  $\left[5, \frac{25}{3}\right]$

- A. ①②④      B. ①③④      C. ②③      D. ①③

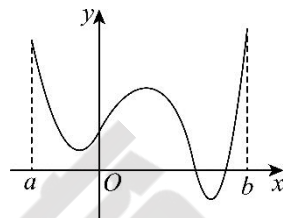
二、填空题(20分)

13. 命题  $p$ : “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} - x_0 - 1 \leq 0$ ” 则  $\neg p$  为\_\_\_\_\_.

14. 甲、乙两位同学计划从“韩阳十景”中挑4个旅游景点：廉村孤树、龟湖夕照、南野桑、马屿香泉随机选择其中一个景点游玩，记事件  $A$ : 甲和乙至少一人选择廉村孤树，事件  $B$ : 甲和乙选择的景点不同，则条件概率  $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

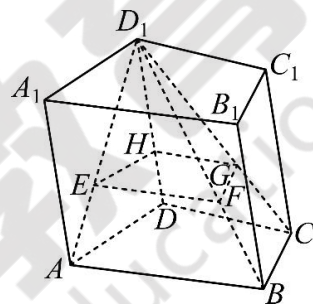
15. 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边长分别为  $a, b, c$ ，且  $\tan A + 3 \tan(A+B) = 0$ ， $a^2 - c^2 = 2b$ ，则  $b$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 函数  $f(x)$  的图像如图所示，已知  $f(0) = 2$ ，则方程  $f(x) - xf'(x) = 1$  在  $(a, b)$  上有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个非负实根.



三、解答题（70分）

17. (12分) 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $\overline{D_1E} = k\overline{D_1A}$ ， $\overline{D_1F} = k\overline{D_1B}$ ，  
 $\overline{D_1G} = k\overline{D_1C}$ ， $\overline{D_1H} = k\overline{D_1D}$ .



(1) 当  $k = \frac{3}{4}$  时，试用  $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$  表示  $\overline{AF}$ ；

(2) 证明：E, F, G, H 四点共面；

18. (12分) 共享电动车是一种新的交通工具，这是新时代下共享经济的促成成果。目前来看，共享电动车的收费方式通过客户端软件和在线支付工具完成付费流程，从开锁到还车所用的时间称为一次租用时间，具体计费标准如下：

- ① 租用时间 30 分钟 2 元，不足 30 分钟按 2 元计算；
- ② 租用时间为 30 分钟以上且不超过 40 分钟，按 4 元计算；
- ③ 租用时间为 40 分钟以上且不超过 50 分钟，按 6 元计算

甲、乙两人独立出行，各租用公共电动车一次，租用时间都不会超过 50 分钟，两人租用时间的概率如下表：

租用时间	不超过 30 分钟	30~40分钟	40~50分钟
甲	0.4	$P$	$q$
乙	0.5	0.2	0.3

若甲、乙租用时间相同的概率为 0.35.

(1) 求  $P, q$  的值；

(2) 设甲、乙两人所付费之和为随机变量  $x$ ，求  $x$  的分布列和数学期望.

19. (12分) 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 > 0$ , 已知  $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{S_n}{a_n} = \frac{1}{2}$ .

(1) 若  $a_1 = 1$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1$  对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  恒成立, 求  $a_1$  的取值范围.

20. (12分) 已知函数  $f(x) = a \ln x - ax + 1$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 若经过点  $(0, 0)$  的直线与函数  $f(x)$  的图像相切于点  $(2, f(2))$ , 求实数  $a$  的值;

(2) 设  $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - 1$ , 若  $g(x)$  有两个极值点为  $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ , 且不等式  $g(x_1) + g(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

21. (12分) 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{2}$ , 左焦点  $F$  到双曲线  $E$  的渐近线的距离为  $\sqrt{2}$ , 过点  $F$  作直线  $l$  与双曲线  $C$  的左、右支分别交于点  $A, B$ , 过点  $F$  作直线  $l_2$  与双曲线  $E$  的左、右支分别交于点  $C, D$ , 且点  $B, C$  关于原点  $O$  对称.

(1) 求双曲线  $E$  的方程;

(2) 求证: 直线  $AD$  过定点.

**注: 22 与 23 题为选做题, 2 选 1, 均为 10 分。**

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{2-2s^2}{1+s^2} \\ y = \frac{4\sqrt{2}s}{1+s^2} \end{cases}$  ( $s$  为参数), 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -1+t\cos\alpha \\ y = 2+t\sin\alpha \end{cases}$

( $t$  为参数).

(1) 求  $C$  和  $l$  的直角坐标方程;

(2) 若曲线  $C$  截直线  $l$  所得线段  $AB$  的中点坐标为  $(-1, 2)$ , 求  $\alpha$ .

23. 已知  $a > 0, b > 0, c > 0, ab + bc + ca = 3$ .

(1) 求  $a^3 + b^3 + c^3$  的最小值  $M$ ;

(2) 关于  $x$  的不等式  $|x-m| - |x+1| > M$  有解, 求实数  $m$  的取值范围.