成都七中高 2024 届高三上入学考试数学文科试题　答案

一、单选题

CACDA　BCDBA　AB

二、填空题

13. $\forall x\in\mathbf{R},e^x-x-1>0$.　14. 8　15. 4　16.①②③④

三、解答题

17. 【详解】(1) 由于所选居民总人数为100，2×2列联表如下表所示：

	感染	不感染	合计
年龄不大于50岁	20	60	80
年龄大于50岁	10	10	20
合计	30	70	100

(2) $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(200-600)^2}{80\times20\times30\times70}\approx4.762>3.841$，

所以能在犯错误的概率不超过5%的前提下认为感染新冠状病与不同年龄有关；

18. 【详解】(1) 在图 2 中，取 MN 的中点 E，连 AE，CE，OE，

因为 $AM=AN$，E 为 MN 的中点，所以 $MN\perp AE$，同理得 $MN\perp CE$，$MN\perp OE$，

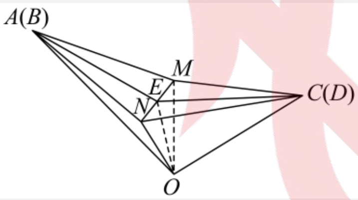
因为 $AE\cap OE=E$，$AE,OE\subset$平面 AOE，所以 $MN\perp$平面 AOE，

因为 $OA\subset$平面 AOE，所以 $MN\perp OA$，

因为 $CE\cap OE=E$，$CE,OE\subset$平面 COE，所以 $MN\perp$平面 COE，

因为 $OC\subset$平面 COE，所以 $MN\perp OC$，

因为 $OA\cap OC=O$，$OA,OC\subset$平面 OAC，所以 $MN\perp$平面 OAC.



(2) 根据图形的对称性可知，$V=2V_{M-OCN}$，

因为 $\triangle OCN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}ON\cdot NC=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，为定值，

所以当点 M 到平面 OCN 的距离最大值时，三棱锥体积最大，此时平面 $OMC\perp$平面 ONC，点 M 到平面 OCN 的距离等于点 M 到 OC 的距离，等于 $\sqrt{3}$，

所以此多面体体积 V 的最大值为 $2\times\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$.

19.【答案】(1) $a_n=n$　　(2) $a_1\ge 2$

【详解】（1）由题意得 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 为公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列，

则 $\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$，即 $2S_n=(n+1)a_n, 2S_{n-1}=na_{n-1}(n\ge 2)$，

两式作差得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\ge 2)$，

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{n}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{2}{1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_1}=n$，$a_n=n(n\ge 2)$，

因为 $a_1=1$，所以 $a_n=n$.

（2）由题知，$S_n=\dfrac{(a_1+na_1)\cdot n}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{a_1}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{2}{a_1}\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\frac{2}{a_1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{2}{a_1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{a_1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，

当 $n\to+\infty$ 时，有 $\dfrac{2}{a_1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\to\dfrac{2}{a_1}$，

因为 $a_1>0$，所以 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}<1$ 恒成立等价于 $\dfrac{2}{a_1}\le 1$，从而 $a_1\ge 2$.

20.【答案】(1) $a=\dfrac{1}{1-\ln 2}$ (2) $[2\ln 2-3,+\infty)$

【详解】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=a\ln x-ax+1$，得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-a$，则 $f'(2)=\dfrac{a}{2}-a=-\dfrac{a}{2}$，

因为经过点 $(0,0)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图像相切于点 $(2,f(2))$，

所以 $k=\dfrac{f(2)}{2}=-\dfrac{a}{2}$，所以 $a\ln 2-2a+1=-a$，解得 $a=\dfrac{1}{1-\ln 2}$，

（2）$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-1=a\ln x-ax+\dfrac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=\dfrac{a}{x}-a+x=\dfrac{x^2-ax+a}{x}(x>0)$，

因为 $g(x)$ 有两个极值点为 x_1，$x_2(x_1\ne x_2)$，

所以 $g'(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

此时方程 $x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

则 $\Delta=a^2-4a>0$，且 $x_1+x_2=a>0, x_1x_2=a>0$，解得 $a>4$，

若不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，则 $\lambda>\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}$ 恒成立，

因为 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1-x_1)+\dfrac{1}{2}x_1^2+a(\ln x_2-x_2)+\dfrac{1}{2}x_2^2=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\dfrac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=a\ln a-\dfrac{1}{2}a^2-a$

不妨设 $h(a)=\dfrac{g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)}{x_1+x_2}=\dfrac{a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a}{a}=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1(a>4)$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-a}{2a}$，

因为 $a>4$，所以 $h'(a)<0$，所以 $h(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上递减，所以 $h(a)<h(4)=2\ln 2-3$，

所以 $\lambda\geq 2\ln 2-3$，

即实数 λ 的取值范围为 $[2\ln 2-3,+\infty)$.

21. 【答案】(1) $E:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (2) $x_A=\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}$ (3)定点 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$

【详解】（1）设 $F\left(-c,0\right)$，由 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，则 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=2$，即 $a=b$，

所以渐近线方程为 $y=\pm x$.

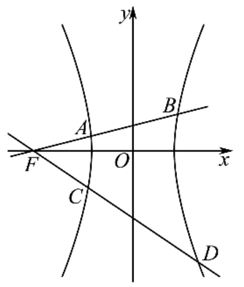
又 F 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则 $\dfrac{c}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，即 $c=2$，$a=b=\sqrt{2}$.

所以双曲线方程为 $E:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设 $B\left(x_0,y_0\right)$，$C\left(-x_0,-y_0\right)$，直线 FB 的方程为 $x=\dfrac{x_0+2}{y_0}y-2$，

直线 FB 的方程与双曲线 $E:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 联立，

$$\left(\frac{\left(x_0+2\right)^2}{y_0^2}-1\right)y^2-\frac{4\left(x_0+2\right)}{y_0}y+2=0.$$



又 $x_0^2-y_0^2=2$，则 $\left(2x_0+3\right)y^2-2\left(x_0+2\right)y_0y+y_0^2=0$

所以 $y_0y_A=\dfrac{y_0^2}{2x_0+3}$，即 $y_A=\dfrac{y_0}{2x_0+3}$，$x_A=\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}$.

（3） 由（2）同理 $y_D=\dfrac{-y_0}{-2x_0+3}$，$x_D=\dfrac{3x_0-4}{-2x_0+3}$，

则 $k_{AD}=\dfrac{\dfrac{y_0}{2x_0+3}-\dfrac{-y_0}{-2x_0+3}}{\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}-\dfrac{3x_0-4}{-2x_0+3}}=\dfrac{y_0\left(-2x_0+3\right)+y_0\left(2x_0+3\right)}{\left(-3x_0-4\right)\left(-2x_0+3\right)-\left(3x_0-4\right)\left(2x_0+3\right)}=-\dfrac{3y_0}{x_0}$，

则直线 AD 方程为 $y-\dfrac{y_0}{2x_0+3}=-3\dfrac{y_0}{x_0}\left(x-\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}\right)$，

令 $y=0$，则 $\dfrac{1}{2x_0+3}=\dfrac{3}{x_0}\left(x-\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}\right)$，即 $x=\dfrac{x_0}{3\left(2x_0+3\right)}+\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}=\dfrac{-4\left(2x_0+3\right)}{3\left(2x_0+3\right)}=-\dfrac{4}{3}$

所以直线 AD 过定点 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$.

22【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1\ (x\neq -2)$；

当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，直线 l 的直角坐标方程为 $y=x\tan\alpha+2+\tan\alpha$，

当 $\cos\alpha=0$ 时，直线 l 的参数方程为 $x=-1$.

(2) 45°

【详解】(1) 由 $\begin{cases} x=\frac{2-2s^2}{1+s^2}, \\ y=\frac{4\sqrt{2}s}{1+s^2}. \end{cases}$ 得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=\frac{(1-s^2)^2}{(1+s^2)^2}+\frac{(2s)^2}{(1+s^2)^2}=1$，而 $x=\frac{4}{1+s^2}-2>-2$，

即曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq -2)$，

由 $\begin{cases} x=-1+t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数)，

当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，消去参数 t，可得直线 l 的直角坐标方程为 $y=x\tan\alpha+2+\tan\alpha$，

当 $\cos\alpha=0$ 时，可得直线 l 的参数方程为 $x=-1$.

（2）将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，

整理可得：$(1+\cos^2\alpha)t^2+4(\sin\alpha-\cos\alpha)t-2=0$．①

$\because$ 曲线 C 截直线 l 所得线段的中点 $(-1,2)$ 在椭圆内，则方程①有两解，设为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=\frac{4\cos\alpha-4\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}=0$，故 $\cos\alpha-\sin\alpha=0$，解得 $\tan\alpha=1$．$\therefore l$ 的倾斜角 α 为 45°．

23.【答案】(1)3　(2) $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

【详解】(1) $a>0,b>0,c>0$，则 $a^3+b^3+1^3\geq 3a\cdot b\cdot 1=3ab$，$b^3+c^3+1^3\geq 3b\cdot c\cdot 1=3bc$，

$c^3+a^3+1^3\geq 3c\cdot a\cdot 1=3ca$，

则 $2(a^3+b^3+c^3)+3\times 1^3\geq 3(ab+bc+ca)=9$，所以 $a^3+b^3+c^3\geq 3$，

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立，$a^3+b^3+c^3$ 的最小值为 $M=3$.

（2）$|x-m|-|x+1|\leq|(x-m)-(x+1)|\leq|m+1|$，

当且仅当 $(x-m)(x+1)\geq 0$ 且 $|x-m|\geq|x+1|$ 时取最大值 $|m+1|$.

$y=|x-m|-|x+1|$ 的最大值为 $|m+1|>3$，

解得 $m\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.