

工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市 2020 级高中毕业班第三次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 3 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

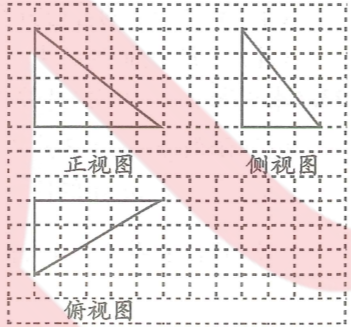
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

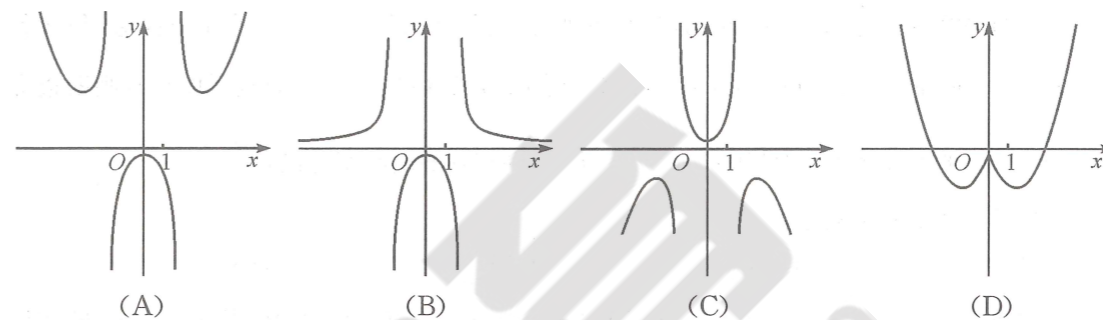
第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $A \cup B =$
 (A) $\{0, 2\}$ (B) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$
 (C) $\{0, 1, 2, 4\}$ (D) $\{1, 2, 4\}$
2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 \leq 0$ ”的否定是
 (A) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 - 1 \leq 0$ (B) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 - 1 > 0$
 (C) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 > 0$ (D) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 - 1 \geq 0$
3. 已知双曲线 C 经过点 $(4, 2)$, 且与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 具有相同的渐近线, 则双曲线 C 的标准方程为
 (A) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$
 (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$
4. 如图是某三棱锥的三视图, 已知网格纸的小正方形边长是 1, 则这个三棱锥中最长棱的长为
 (A) 5 (B) $\sqrt{34}$
 (C) $\sqrt{41}$ (D) 7



5. 函数 $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x^2 - 3}$ 的图象大致为



6. 一次数学考试后,某班级平均分为 110 分,方差为 s_1^2 . 现发现有两名同学的成绩计算有误,甲同学成绩被误判为 113 分,实际得分为 118 分;乙同学成绩误判为 120 分,实际得分为 115 分. 更正后重新计算,得到方差为 s_2^2 , 则 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系为
 (A) $s_1^2 = s_2^2$ (B) $s_1^2 > s_2^2$ (C) $s_1^2 < s_2^2$ (D) 不能确定
7. 已知 a, b 是两个非零向量, 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{CD} = b$. 给出定义: 经过 \overrightarrow{AB} 的起点 A 和终点 B , 分别作 \overrightarrow{CD} 所在直线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 则称向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 a 在 b 上的投影向量. 已知 $a = (1, 0)$, $b = (\sqrt{3}, 1)$, 则 a 在 b 上的投影向量为
 (A) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (B) $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ (C) $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (D) $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$
8. 世界大学生运动会(简称大运会)由国际大学生体育联合会主办, 每两年举办一届, 是规模仅次于奥运会的世界综合性运动会, 第 31 届大运会将于 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日在成都召开. 为办好本届大运会, 组委会精心招募了一批志愿者, 现准备将甲、乙等 6 名志愿者安排进“东安湖体育公园”, “凤凰山体育公园”, “四川省体育馆”工作, 每个地方安排两人且每人只能在一个场馆工作. 若每位志愿者被分到各个场馆的可能性相同, 则甲、乙两人被安排在同一场馆的概率为
 (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$
9. 设 S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{2023} = 2023$, 则 $\frac{1}{a_4} + \frac{4}{a_{2020}}$ 的最小值为
 (A) $\frac{5}{2}$ (B) 5 (C) 9 (D) $\frac{9}{2}$
10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$), 当 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 时, $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. 若将函数 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 然后再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则不等式 $g(x) \geq \frac{1}{2}$ 的解集为
 (A) $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ (B) $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$
 (C) $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ (D) $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$) 与椭圆 C 相交于 A, B 两点. 有下列结论: ① 四边形 AF_1BF_2 为平行四边形; ② 若 $AE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 则直线 BE 的斜率为 $\frac{1}{2}k$; ③ 若 $|OA| = c$ (O 为坐标原点), 则四边形 AF_1BF_2 的面积为 b^2 ; ④ 若 $|AF_1| = 2|AF_2|$, 则椭圆的离心率可以是 $\frac{2}{3}$.

其中错误结论的个数是

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

12. 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - m \ln x$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 其中 $m \in \mathbf{R}$, 则 $mx_1x_2x_3$ 的取值范围是

- (A) $(1, +\infty)$ (B) $(2, +\infty)$ (C) $(e, +\infty)$ (D) $(3, +\infty)$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知复数 $z = (a + i)(2 + i)$ 是纯虚数 (i 为虚数单位), 则实数 a 的值为_____.

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 = 3, a_6 = 27$, 则 a_8 的值为_____.

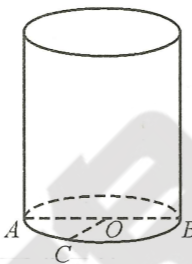
15. 如图, AB 为圆柱下底面圆 O 的直径, C 是下底面圆周上一点, 已知

$\angle AOC = \frac{\pi}{3}, OA = 2$, 圆柱的高为 5. 若点 D 在圆柱表面上运动, 且满

足 $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = 0$, 则点 D 的轨迹所围成图形的面积为_____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 射线 OT 与直线 $l: x = 9$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 分别相交于 A, B 两点, 若线段 OB 上存在点 $M(m, n)$ (不含端点), 使

得对于圆 O 上任意一点 P 都满足 $\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|BM|}{|BA|}$, 则 mn 的最大值为_____.



三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

某旅游公司针对旅游复苏设计了一款文创产品来提高收益. 该公司统计了今年以来这款文创产品定价 x (单位: 元) 与销量 y (单位: 万件) 的数据如下表所示:

产品定价 x (单位: 元)	9	9.5	10	10.5	11
销量 y (单位: 万件)	11	10	8	6	5

(I) 依据表中给出的数据, 判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 请计算相关系数并加以说明 (计算结果精确到 0.01);

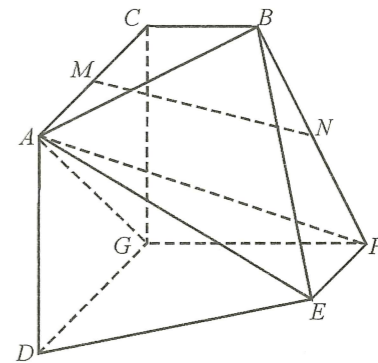
(II) 建立 y 关于 x 的回归方程, 预测当产品定价为 8.5 元时, 销量可达到多少万件.

参考公式: $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

参考数据: $\sqrt{65} \approx 8.06$.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEFG$ 中, 已知 $ADGC$ 是正方形, $GD \parallel EF, GF \parallel BC, FG \perp$ 平面 $ADGC, M, N$ 分别是 AC, BF 的中点, 且 $BC = EF = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2}FG$.



(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 AFG ;

(II) 求直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}c + a = b \cos C - c \cos B$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 D 是 AC 边上一点, 且 $BD = CD = \frac{1}{3}b$, 求 $\cos \angle BDA$.

20. (本小题满分 12 分)

已知斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 P, Q 两点.

(I) 求线段 PQ 中点纵坐标的值;

(II) 已知点 $T(\sqrt{3}, 0)$, 直线 TP, TQ 分别与抛物线相交于 M, N 两点 (异于 P, Q). 求证: 直线 MN 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - ax^3 \sin x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 (π, π^4) 处的切线方程;

(II) 若 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 求 a 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - \frac{2t}{3} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点

O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1 + 3 \sin^2 \theta}$.

(I) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 若 P 是曲线 C 上一点, Q 是直线 l 上一点, 求 $|PQ|$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - m|$, 且不等式 $f(x) < 3$ 的解集为 $(1, n)$.

(I) 求实数 m, n 的值;

(II) 若正实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = m$, 证明: $\frac{a^4}{b^2 + 1} + \frac{b^4}{c^2 + 1} + \frac{c^4}{a^2 + 1} \geq \frac{1}{4}$.