

绵阳市高中 2020 级第二次诊断性考试 理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

DACBD ABCAD CA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 9 14. $\frac{1}{3}$ 15. 5 16. [1, 3)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）由 $3a \cos C + a^2 \sin C = 3b$ ，

可得 $3 \sin A \cos C + a \sin A \sin C = 3 \sin B$ ，..... 2 分

又 $3 \sin B = 3 \sin(A + C) = 3(\sin A \cos C + \cos A \sin C)$ ，..... 4 分

$\therefore a \sin A = 3 \cos A$ ，5 分

且 $A = \frac{\pi}{3}$ ，可得 $a = \sqrt{3}$ ；..... 6 分

（2）由 $\overline{BA} \cdot \overline{AC} = c \cdot b \cdot \cos(\pi - A) = -\frac{1}{2}c \cdot b = -\frac{1}{2}$ ，可得 $c \cdot b = 1$ ，..... 8 分

由余弦定理 $c^2 + b^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A = 4$ 9 分

$\therefore \overline{AT} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ ，

平方可得 $(\overline{AT})^2 = \frac{1}{4}[(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}]$ ，..... 10 分

即 $(\overline{AT})^2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + 2bc \cos A) = \frac{5}{4}$ ，所以 $AT = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 12 分

18. 解：（1）因为 $0.92 < 0.99$ ，根据统计学相关知识， R^2 越大，意味着残差平方和 $\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y})^2$

越小，那么拟合效果越好，因此选择非线性回归方程② $\hat{y} = \hat{m}x^2 + \hat{n}$ 进行拟合更加符合问题实际. 4 分

（2）令 $u_i = x_i^2$ ，则先求出线性回归方程： $\hat{y} = \hat{m}u + \hat{n}$ ，..... 5 分

$\therefore \bar{u} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = 11$ ， $\bar{y} = \frac{0.8+1.1+1.5+2.4+3.7}{5} = 1.9$ ，..... 7 分

$\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = (1-11)^2 + (4-11)^2 + (9-11)^2 + (16-11)^2 + (25-11)^2 = 374$ ，..... 9 分

$\therefore \hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{45.1}{374} \approx 0.121$ ，..... 10 分

由 $1.9 = 0.121 \times 11 + \hat{n}$ ，得 $\hat{n} = 0.569 \approx 0.57$ ，…………… 11 分
 即 $\hat{y} = 0.12u + 0.57$ ，

∴ 所求非线性回归方程为： $\hat{y} = 0.12x^2 + 0.57$ 。…………… 12 分

19. 解：设 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，则 $b_3 = b_1 \cdot q^2$ ，所以 $\frac{8}{27} = \frac{2}{3}q^2$ ，

所以 $q = \pm \frac{2}{3}$ ，…………… 2 分

因为 $\{b_n\}$ 的各项都为正，所以取 $q = \frac{2}{3}$ ，…………… 3 分

所以 $b_n = (\frac{2}{3})^n$ 。…………… 4 分

若选①：由 $2a_n - S_n = 1(n \geq 1)$ ，得 $2a_{n-1} - S_{n-1} = 1(n \geq 2)$ ，…………… 5 分

两式相减得： $2a_n - 2a_{n-1} - a_n = 0$ ，整理得 $a_n = 2a_{n-1}(n \geq 2)$ ，…………… 6 分

因为 $a_1 = 1 \neq 0$ ，所以 $\{a_n\}$ 是公比为 2，首项为 1 的等比数列，…………… 7 分

∴ $a_n = 2^{n-1}$ ，…………… 8 分

∴ $a_n b_n = \frac{1}{2} \times (\frac{4}{3})^n$ ，…………… 9 分

∵ $y = \frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{3})^x$ 在 \mathbf{R} 上为增函数，…………… 10 分

∴ 数列 $\{a_n b_n\}$ 单调递增，没有最大值，…………… 11 分

∴ 不存在 $m \in N^*$ ，使得对任意的 $n \in N^*$ ， $a_n b_n \leq a_m b_m$ 恒成立。…………… 12 分

若选择②：因为 $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2(n \geq 2)$ ，且 $a_1 \neq 0$ ， $a_2 \neq 0$ ，

∴ $\{a_n\}$ 为等比数列，…………… 6 分

公比 $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}$ ，…………… 7 分

∴ $a_n = (\frac{1}{4})^{n-1}$ ，…………… 8 分

所以 $a_n b_n = (\frac{1}{4})^{n-1} \cdot (\frac{2}{3})^n = 4 \cdot \frac{2^{-n}}{3^n} = 4 \cdot (\frac{1}{6})^n \leq 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。…………… 10 分

当且仅当 $n=1$ 时取得最大值 $\frac{2}{3}$ ，…………… 11 分

∴ 存在 $m=1$ ，使得对任意的 $n \in N^*$ ， $a_n b_n \leq a_m b_m$ 恒成立。…………… 12 分

若选择③：因为 $a_n - 1 = a_{n-1}$ ，所以 $a_n - a_{n-1} = 1(n \geq 2)$ ，…………… 5 分

∴ $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列，又 $a_1 = 1$ ，…………… 6 分

∴ $a_n = n$ ，所以 $a_n b_n = n \cdot (\frac{2}{3})^n$ ，…………… 8 分

设 $c_n = a_n b_n$ ，则 $c_n - c_{n-1} = n \cdot (\frac{2}{3})^n - (n-1) \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{3-n}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ ，.....9分

∴ 当 $n < 3$ 时， $c_n - c_{n-1} > 0$ ，所以 $c_n > c_{n-1}$ ，

当 $n = 3$ 时， $c_n - c_{n-1} = 0$ ，所以 $c_n = c_{n-1}$ ，

当 $n > 3$ 时， $c_n - c_{n-1} < 0$ ，所以 $c_n < c_{n-1}$ ，

则 $c_1 < c_2 = c_3 > c_4 > c_5 > \dots$ ，.....11分

∴ 存在 $m = 2$ 或 3 ，使得对任意的 $n \in N^*$ ， $a_n b_n \leq a_m b_m$ 恒成立。.....12分

20. 解：（1）设 $B(x_1, y_1)$ ， $C(x_2, y_2)$ ，

直线 BC 的方程为： $x = my + 4 (m = \frac{1}{k})$ ，.....1分

联立 $\begin{cases} x = my + 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消 x 整理得： $(3m^2 + 4)y^2 + 24my + 36 = 0$ ，.....2分

∴ $y_1 + y_2 = \frac{-24m}{3m^2 + 4}$ ， $y_1 \cdot y_2 = \frac{36}{3m^2 + 4}$3分

从而： $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1 \cdot y_2}{(my_1 + 6)(my_2 + 6)}$

$$= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36}$$

$$= \frac{36}{3m^2 + 4} = \frac{1}{4}$$

∴ $k_1 \cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$5分

（2）直线 AB 的方程为： $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ ，.....6分

令 $x = 4$ ，得到 $y_M = \frac{6y_1}{x_1 + 2} = \frac{6y_1}{my_1 + 6}$ ，.....7分

同理： $y_N = \frac{6y_2}{my_2 + 6}$8分

从而 $|MN| = |y_M - y_N| = \left| \frac{6y_1}{my_1 + 6} - \frac{6y_2}{my_2 + 6} \right|$

$$= \frac{36|y_1 - y_2|}{|m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36|} \dots\dots\dots 9分$$

又 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12\sqrt{m^2 - 4}}{3m^2 + 4}$ ，

$$|m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36| = \frac{144}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |MN| = 3\sqrt{m^2 - 4}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为: } m = \frac{1}{k} \in [3, 4], \text{ 所以 } |MN| \in [3\sqrt{5}, 6\sqrt{3}],$$

$$\text{即线段 } MN \text{ 长度的取值范围为 } [3\sqrt{5}, 6\sqrt{3}]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解：（1）由 $a=1$ 时， $f'(x) = (x+1)(e^x - 1)$ ， $\dots\dots\dots 1$ 分

由 $f'(x) > 0$ 解得： $x > 0$ 或 $x < -1$ ；由 $f'(x) < 0$ 解得： $-1 < x < 0$ 。 $\dots\dots\dots 3$ 分

故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ ， $(0, +\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减。 $\dots\dots\dots 4$ 分

$$\therefore f(x) \text{ 的极大值是 } f(-1) = \frac{e-2}{2e}, \text{ 极小值是 } f(0) = 0; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

（2） $f'(x) = (x+1)(e^x - a)$ ， $x \in [0, 2]$ 时， $e^x \in [1, e^2]$ ，且 $f(2) = 2e^2 - 4a$ ， $f(0) = 0$ ，
 $\forall x_1, x_2 \in [0, 2]$ ，恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a + 2e^2$ 等价于 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a + 2e^2$ 。

i) 若 $a \leq 1$ 时， $e^x - a \geq 0$ ，故 $f'(x) \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增，故

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(2) - f(0) = 2e^2 - 4a \leq a + 2e^2, \text{ 解得: } 0 \leq a \leq 1, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

ii) 若 $a \geq e^2$ 时， $e^x - a \leq 0$ ，故 $f'(x) \leq 0$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减，故

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(0) - f(2) = 4a - 2e^2 \leq a + 2e^2, \text{ 解得: } e^2 \leq a \leq \frac{4}{3}e^2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

iii) 若 $1 < a < e^2$ 时，由 $f'(x) = (x+1)(e^x - a) > 0$ 解得： $\ln a < x \leq 2$ ，故 $f(x)$ 在区间 $(\ln a, 2]$ 上单调递增； $\dots\dots\dots 8$ 分

由 $f'(x) = (x+1)(e^x - a) < 0$ 解得： $0 \leq x < \ln a$ ，故 $f(x)$ 在区间 $[0, \ln a)$ 上单调递减。

$$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln a) = -\frac{1}{2}a(\ln a)^2, \quad f(x)_{\max} = f(2) \text{ 或 } f(0).$$

$$\text{又 } f(2) - f(0) = 2e^2 - 4a, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

① 当 $1 < a \leq \frac{e^2}{2}$ 时， $f(2) - f(0) \geq 0$ ，故

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(2) - f(\ln a) = 2e^2 - 4a + \frac{1}{2}a(\ln a)^2 \leq a + 2e^2,$$

$$\text{解得: } 0 < a \leq e^{\sqrt{10}}, \text{ 又 } 1 < a \leq \frac{e^2}{2}, \text{ 故此时 } 1 < a \leq \frac{e^2}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

② 当 $\frac{e^2}{2} < a < e^2$ 时， $f(2) - f(0) < 0$ ，故

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(0) - f(\ln a) = \frac{1}{2}a(\ln a)^2 \leq a + 2e^2,$$

$$\text{令 } h(a) = \frac{1}{2}a(\ln a)^2 - a - 2e^2, \text{ 则 } h'(a) = \frac{1}{2}(\ln a)^2 + \ln a - 1, \text{ 又 } \ln a \in (2 - \ln 2, 2),$$

故 $h'(a) = \frac{1}{2}(\ln a)^2 + \ln a - 1 > 0$ ，即 $h(a)$ 在区间 $(\frac{e^2}{2}, e^2)$ 上单调递增，

又 $h(e^2) = -e^2 < 0$ ，则 $\frac{1}{2}a(\ln a)^2 \leq a + 2e^2$ 恒成立。..... 11 分

综上： $0 \leq a \leq \frac{4}{3}e^2$ 。..... 12 分

22. 解：（1）①当 B 在线段 AO 上时，由 $|OA| \cdot |OB| = 4$ ，则 $B(2, \pi)$ 或 $(2, \frac{3\pi}{2})$ ；

②当 B 不在线段 AO 上时，设 $B(\rho, \theta)$ ，且满足 $|OA| \cdot |OB| = 4$ ，

$\therefore A(\frac{4}{\rho}, \theta + \pi)$ ，..... 1 分

又 $\because A$ 在曲线 l 上，则 $\frac{4}{\rho} \cos(\theta + \pi) + \frac{4}{\rho} \sin(\theta + \pi) = -2$ ，..... 3 分

$\therefore \rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta$ ，..... 4 分

又 $\because \pi \leq \theta + \pi \leq \frac{3\pi}{2}$ ，即 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

综上所述，曲线 C 的极坐标方程为：

$\rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，或 $\rho = 2 (\theta = \pi \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{2})$ 。..... 5 分

(2) ①若曲线 C 为： $\rho = 2 (\theta = \pi \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{2})$ ，此时 P, Q 重合，不符合题意；

②若曲线 C 为： $\rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，设 $l_1: \theta = \alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ ，

又 l_1 与曲线 C 交于点 P ，联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta, \end{cases}$

得： $\rho_P = 2\sin\alpha + 2\cos\alpha$ ，..... 6 分

又 l_1 与曲线 l 交于点 Q ，联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho \sin\theta + \rho \cos\theta = -2, \end{cases}$

得： $\rho_Q = \frac{-2}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ ，..... 7 分

又 $\because M$ 是 P, Q 的中点，

$\rho_M = \frac{\rho_P + \rho_Q}{2} = \sin\alpha + \cos\alpha - \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ ，..... 8 分

令 $\sin\alpha + \cos\alpha = t$ ，则 $t = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ ，

又 $\because 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ，则 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ ，且 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ ，

$\therefore \rho_M = t - \frac{1}{t} (1 \leq t \leq \sqrt{2})$, 且 $\rho_M = t - \frac{1}{t}$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上是增函数, 9 分

$\therefore 0 \leq \rho_M \leq \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且当 $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

$\therefore |OM|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 10 分

23. 解: (1) 由 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $[n, 1]$, 可知, 1 是方程 $f(x) = 3$ 的根,

$\therefore f(1) = 3 + |m+1| = 3$, 则 $m = -1$, 1 分

$\therefore f(x) = |2x+1| + |x-1|$,

① 当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -3x \leq 3$, 即 $x \geq -1$, 解得: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, 2 分

② 当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f(x) = x+2 \leq 3$, 解得: $-\frac{1}{2} < x < 1$, 3 分

③ 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 3x \leq 3$, 解得: $x = 1$ 4 分

综上所述: $f(x)$ 的解集为 $[-1, 1]$, 所以 $m = -1, n = -1$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $m = -1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = 2$ 6 分

令 $\frac{1}{2a} = x, \frac{2}{b} = y$, 则 $2a = \frac{1}{x}, b = \frac{2}{y}$,

又 a, b 均为正数, 则 $x + y = 2 (x > 0, y > 0)$,

由基本不等式得, $2 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$, 7 分

$\therefore xy \leq 1$, 当且仅当 $x = y = 1$ 时, 等号成立.

所以有 $\frac{1}{xy} \geq 1$, 当且仅当 $x = y = 1$ 时, 等号成立. 8 分

又 $16a^2 + b^2 = 4(2a)^2 + b^2 = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}$

$\geq 2\sqrt{\frac{4}{x^2} \cdot \frac{4}{y^2}} = \frac{8}{xy}$ (当且仅当 $x = y$ 时, 等号成立). 9 分

$\therefore 16a^2 + b^2 \geq 8$ 成立, (当且仅当, $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时等号成立). 10 分