绵阳市高中 2020 级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

DDCAA　BCDBA　CA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\sqrt{2}$　　14．-1　　15．-3　　16．[1，3)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）由 $3(b-a\cos C)=a^2\sin C$，及正弦定理

可得，$3\sin B-3\sin A\cos C=a\sin A\sin C$，……2 分

∵ $3\sin B=3\sin(A+C)=3\sin A\cos C+3\cos A\sin C$ ……4 分

∴ $3\cos A\sin C=a\sin A\sin C$，……6 分

即 $a\sin A=3\cos A$，且 $A=\dfrac{\pi}{3}$，可得 $a=\sqrt{3}$；……8 分

（2）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot b\cdot\cos(\pi-A)=-\dfrac{1}{2}c\cdot b=-\dfrac{1}{2}$，可得 $c\cdot b=1$，……10 分

由余弦定理 $b^2+c^2=a^2+2bc\cdot\cos A=4$．……12 分

18．解：（1）由题意知，$2S_n=a_n^2+a_n$，①……1分

当n=1时，$2a_1=a_1^2+a_1$，则 $a_1=1$；……2分

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，②……3分

①②相减可得，$2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，……4分

∴$a_n+a_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2$，则$a_n-a_{n-1}=1$，

∴数列$\{a_n\}$是以 $a_1=1$ 为首项，1为公差的等差数列，……5分

所以，$a_n=n(n\in N^*)$．……6分

（2）$a_nb_n=n\cdot(\dfrac{2}{3})^n$，……7 分

设 $c_n=a_nb_n$，则 $c_n-c_{n-1}=n\cdot(\dfrac{2}{3})^n-(n-1)\cdot(\dfrac{2}{3})^{n-1}=\dfrac{3-n}{3}\cdot(\dfrac{2}{3})^{n-1}$，……8 分

∴当 $n<3$ 时，$c_n-c_{n-1}>0$，所以 $c_n>c_{n-1}$，……9 分

当 $n=3$ 时，$c_n-c_{n-1}=0$，所以 $c_n=c_{n-1}$，……10 分

当 $n>3$ 时，$c_n-c_{n-1}<0$，所以 $c_n<c_{n-1}$，…………11 分

则 $c_1<c_2=c_3>c_4>c_5>\cdots$，

∴存在 $m=2$ 或3，使得对任意的 $n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$ 恒成立．…………12 分

19．**解**：（1）因为 0.92<0.99，根据统计学相关知识，R^2 越大，意味着残差平方和 $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y})^2$ 越小，那么拟合效果越好，因此选择非线性回归方程② $\hat{y}=\hat{m}x^2+\hat{n}$ 进行拟合更加符合问题实际．…………4 分

（2）令 $u_i=x_i^2$，则先求出线性回归方程：$\hat{y}=\hat{m}u+\hat{n}$，…………5 分

∵ $\bar{u}=\dfrac{1+4+9+16+25}{5}=11$，$\bar{y}=\dfrac{0.8+1.1+1.5+2.4+3.7}{5}=1.9$，…………7 分

$\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2=(1-11)^2+(4-11)^2+(9-11)^2+(16-11)^2+(25-11)^2=374$，…………9 分

∴ $\hat{m}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}=\dfrac{45.1}{374}\approx 0.121$，…………10 分

由 $1.9=0.121\times 11+\hat{n}$，得 $\hat{n}=0.569\approx 0.57$，

即 $\hat{y}=0.12u+0.57$，…………11 分

∴所求非线性回归方程为：$\hat{y}=0.12x^2+0.57$．…………12 分

20．**解**：（1）设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

直线 BC 的方程为：$x=my+4$，其中 $m=\dfrac{1}{k}$，…………1 分

联立 $\begin{cases}x=my+4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消 x 整理得：$(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，…………2 分

所以：$y_1+y_2=\dfrac{-24m}{3m^2+4}$，$y_1\cdot y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$，…………3 分

从而 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1\cdot y_2}{(my_1+6)(my_2+6)}$

$=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36}$

$$=\frac{\frac{36}{3m^2+4}}{\frac{36m^2}{3m^2+4}-\frac{144m^2}{3m^2+4}+36}=\frac{1}{4}$$

所以：$k_1\cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$．……………………………………………………5 分

（2）直线 AB 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，……………………………………6 分

令 $x=4$，得到 $y_M=\frac{6y_1}{x_1+2}=\frac{6y_1}{my_1+6}$，…………………………………… 7 分

同理：$y_N=\frac{6y_2}{my_2+6}$．……………………………………………………………8 分

从而 $|MN|=|y_M-y_N|=|\frac{6y_1}{my_1+6}-\frac{6y_2}{my_2+6}|$

$$=\frac{36|y_1-y_2|}{|m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36|}$$ ……………………………………9 分

又 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$，

$|m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36|=\frac{144}{3m^2+4}$，…………………………………… 10 分

所以 $|MN|=3\sqrt{m^2-4}$，……………………………………………………… 11 分

因为：$m=\frac{1}{k}\in[3，4]$，所以 $|MN|\in[3\sqrt{5}，6\sqrt{3}]$，

即线段 MN 长度的取值范围为 $[3\sqrt{5}，6\sqrt{3}]$．……………………………………12 分

21．**解**：（1）解：(1) a=2 时，$f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，

$f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，…………………………………………… 2 分

由 $f'(x)>0$ 解得：$x>1$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$；由 $f'(x)<0$ 解得：$\frac{1}{2}<x<1$．………………3 分

故 $f(x)$在区间 $(1,+\infty)$，$(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调递减．…………4 分

所以 $f(x)$的极大值是 $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-\ln 2$，极小值是 $f(1)=0$；…………………………… 5 分

（2）$f'(x)=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}$，且 $x-1\geqslant 0$，……6 分

①当 $a\geqslant 1$ 时，$ax-1\geqslant 0$，$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}\geqslant 0$，

故 $f(x)$在区间[1，2]上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=h(a)=0$，……7 分

②当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$ax-1\le 0$，$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}\leqslant 0$，

故 $f(x)$在区间[1，2]上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=h(a)=f(2)=\dfrac{a}{2}+\ln 2-1\geqslant 0$，显然 $h(a)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 上单调递增，

故 $h(a)\leqslant h(\dfrac{1}{2})=\ln 2-\dfrac{3}{4}<0$．……9 分

③当 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，由 $f'(x)>0$ 解得：$\dfrac{1}{a}<x\leqslant 2$；由 $f'(x)<0$ 解得：$1\leqslant x<\dfrac{1}{a}$．

故 $f(x)$在区间 $(\dfrac{1}{a},2]$ 上单调递增，在区间 $[1,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减．

此时 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{a})=h(a)=\dfrac{a}{2}-\ln a-\dfrac{1}{2a}$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{(a-1)^2}{2a^2}\geqslant 0$，

故 $h(a)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递增，故 $h(a)<h(1)=0$．……11 分

综上：$h(a)=\begin{cases}0，a\geqslant 1\\ \dfrac{a}{2}+\ln 2-1，0<a\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{a}{2}-\ln a-\dfrac{1}{2a}，\dfrac{1}{2}<a<1\end{cases}$，且 $h(a)$的最大值是 0.……12 分

22．**解：**（1）①当 B 在线段 AO 上时，由$|OA|\cdot|OB|=4$，则 B（2，π）或（2，$\dfrac{3\pi}{2}$）；

②当 B 不在线段 AO 上时，设 B（ρ，θ），且满足$|OA|\cdot|OB|=4$，

$\therefore A(\dfrac{4}{\rho}，\theta+\pi)$，……1 分

又$\because A$ 在曲线 l 上，则 $\dfrac{4}{\rho}\cos(\theta+\pi)+\dfrac{4}{\rho}\sin(\theta+\pi)=-2$，……3 分

$\therefore\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$，……4 分

又$\because\pi\leqslant\theta+\pi\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$，即 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

综上所述，曲线 C 的极坐标方程为：

$\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），或 $\rho=2\,(\theta=\pi$或$\theta=\frac{3\pi}{2})$.……………………… 5 分

（2）①若曲线 C 为：$\rho=2\,(\theta=\pi$或$\theta=\frac{3\pi}{2})$，此时 P，Q 重合，不符合题意；

②设 l_1：$\theta=\alpha$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），

又 l_1 与曲线 C 交于点 P，联立$\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=2\sin\theta+2\cos\theta,\end{cases}$

得：$\rho_P=2\sin\alpha+2\cos\alpha$ ，…………………………………………………………… 6 分

又 l_1 与曲线 l 交于点 Q，联立$\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\sin\theta+\rho\cos\theta=-2,\end{cases}$

得：$\rho_Q=\dfrac{-2}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，……………………………………………………………… 7 分

又∵M 是 P，Q 的中点，

$\rho_M=\dfrac{\rho_P+\rho_Q}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha-\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$，…………………………8 分

令 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，

又∵ $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，且 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，

∴ $\rho_M=t-\frac{1}{t}(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，且 $\rho_M=t-\frac{1}{t}$ 在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上是增函数，…………………… 9 分

∴ $\rho_M\leqslant\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且当 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

∴ $|OM|$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………10 分

23．**解**：（1）由 $f(x)\leqslant3$ 的解集为$[n，1]$，可知，1 是方程 $f(x)=3$ 的根，

∴ $f(1)=3+|m+1|=3$，则 $m=-1$，…………………………………………………… 1 分

∴ $f(x)=|2x+1|+|x-1|$，

①当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-3x\leqslant3$，即 $x\geqslant-1$，解得：$-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$，………………2 分

②当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f(x)=x+2\leqslant3$，解得：$-\frac{1}{2}<x<1$，……………………………… 3 分

③当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=3x\leqslant3$，解得：$x=1$. ……………………………………………… 4 分

综上所述：$f(x)$ 的解集为$[-1，1]$，所以 $m=-1$，$n=-1$. ………………………… 5 分

（2）由（1）可知 $m=-1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}=2$.……………………………………………………6 分

令 $\frac{1}{2a}=x$，$\frac{2}{b}=y$，则 $2a=\frac{1}{x}$，$b=\frac{2}{y}$，

又 a，b 均为正数，则 $x+y=2$（$x>0, y>0$），

由基本不等式得，$2=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，……………………………………………………7 分

∴ $xy\leqslant 1$，当且仅当，$x=y=1$ 时等号成立.

所以有 $\frac{1}{xy}\geqslant 1$，当且仅当，$x=y=1$ 时等号成立.……………………………………8 分

又 $16a^2+b^2=4(2a)^2+b^2=\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{x^2}\cdot\frac{4}{y^2}}=\frac{8}{xy}$(当且仅当，$x=y$ 时等号成立).…………9 分

∴ $16a^2+b^2\geqslant 8$ 成立，(当且仅当，$a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时等号成立)．………………… 10 分