绵阳市高中 2020 级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

BDABC　　BBCDA　　DC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．2　　14．31　　15．10.5　　16．(−2，1)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}$．……4 分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，……6 分

解得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

∴函数 $f(x)$的单调递减区间为$[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$．……8 分

（2）由 $f(x)=-1$，得 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$，

∵ $x\in[0,\ \pi]$，∴ $2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$．……9 分

∴ $2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}$，……11 分

解得 $x=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$．……12 分

18．解：（1）证明：∵ $a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

∴ $a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=4$．……3 分

∵ $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=1$，∴ $a_2-a_1=\dfrac{1}{2}$，……4 分

∴数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，4 为公比的等比数列．……6 分

（2）由（1）知，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\times 4^{n-1}=2^{2n-3}$，……8 分

∴ $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2^{2n-5}+2^{2n-7}+2^{2n-9}+\cdots+2^{-1}+2^{-1}$．……11 分

当 n=1 时，$a_1=\frac{1}{3}(2^{-1}+1)=\frac{1}{2}$.

综上所述，$a_n==\frac{1}{3}(2^{2n-3}+1)\ (n\in N^*)$. ……………………………………12 分

19．**解**：（1）$\because a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得 $\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，……………………………………1 分

即 $\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

$\therefore \sin(A-B)=\sin B$，……………………………………………………………3 分

$\therefore A-B=B$ 或 $(A-B)+B=\pi$（舍），即 $A=2B$，……………………………………4 分

$\therefore C=\pi-A-B=\pi-3B$，

$\therefore \sin C=\sin(\pi-3B)=\sin 3B$. ……………………………………………………6 分

（2）由锐角△ABC，可得 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<A=2B<\frac{\pi}{2}$，$0<C=\pi-3B<\frac{\pi}{2}$.

即 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………9 分

$\because \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 3B}{\sin 2B}=\frac{\sin 2B\cdot\cos B+\cos 2B\cdot\sin B}{\sin 2B}=2\cos B-\frac{1}{2\cos B}$. ………11 分

$\therefore \frac{c}{a}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3})$. …………………………………………………………12 分

20．**解**：由题意得 $f'(x)=x^2-(k+4)x+4k=(x-4)(x-k)$. ………………………1 分

（1）当 $k=4$ 时，由 $f'(x)=(x-4)^2\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $k>4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(4,\ k)$ 上单调递减，

在 $(-\infty,4)$ 和 $(k,\ +\infty)$ 上单调递增. ……………………………3 分

当 $k<4$ 时，易知函数 $f(x)$ 在 $(k,\ 4)$ 上单调递减，

在 $(-\infty,k)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………5 分

（2）当 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，3)上为单调函数，最多只有一个零点.

当 $0<k<3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，k)上单调递增，在(k，3)上单调递减. …………7 分

要使函数 $f(x)$ 在(0，3)上有两个零点，则需满足：

$0<k<3$ 且 $\begin{cases} f(k)>0, \\ f(0)<0, \\ f(3)<0, \end{cases}$ 解得 $1<k<\frac{13}{9}$. ……………………………………9 分

$\therefore f_{\min}(x)=\min\{f(0),\ f(3)\}$. ………………………………………………10 分

又 $f(3)-f(0)=\frac{15}{2}k-9$，

$\therefore$ 当 $k>\frac{6}{5}$ 时，$f(3)>f(0)$；当 $k<\frac{6}{5}$ 时，$f(3)<f(0)$．

又 $\frac{6}{5}<\frac{13}{9}$，$\therefore f_{\min}(x)=\begin{cases}-\frac{11}{6},\frac{6}{5}\leqslant k<\frac{13}{9},\\ \frac{15k}{2}-\frac{65}{6},1<k<\frac{6}{5}.\end{cases}$ ……………………………12 分

21．解：（1）由题意得 $f'(x)=2e^x-2x-a$．

令 $g(x)=2e^x-2x-a$，则 $g'(x)=2e^x-2>0$．

$\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

则函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0)=2-a$．……………………………………………3 分

①当 $2-a\geqslant0$，即 $a\leqslant2$ 时，可得 $f'(x)\geqslant f'(0)\geqslant0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．

又 $f(0)=0$，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$ 恒成立．……………………………………………4 分

②当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0)=2-a<0$，

且存在 $x_0>0$，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$．

又 $f(0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f(x)<0$，

这与 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$ 相矛盾．……………………………………………5 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$．……………………………………………6 分

（2）由(1) 得当 $a=2$ 时，不等式 $f(x)=2e^x-x^2-2x-2\geqslant0$ 恒成立，

$\therefore 2e^x-1\geqslant x^2+2x+1$．

令 $x=n$，得 $2e^n-1\geqslant n^2+2n+1$．……………………………………………8 分

$\therefore \frac{2}{2e^n-1}\leqslant\frac{2}{n^2+2n+1}<\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$．……………………………9 分

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$，

$x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为 $(0,1)$ 上的增函数；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为 $(1,+\infty)$ 上的增函数；

$\therefore h(x)\le h(1)=0$，则 $\ln x\leqslant x-1$．

$\therefore \ln(1+\frac{2}{2e^n-1})<\frac{2}{2e^n-1}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$，……………………………10 分

$\therefore \ln(1+\frac{2}{2e-1})(1+\frac{2}{2e^2-1})(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots(1+\frac{2}{2e^n-1})$

$=\ln(1+\frac{2}{2e-1})+\ln(1+\frac{2}{2e^2-1})+\ln(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots+\ln(1+\frac{2}{2e^n-1})$

$<(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$<\ln e^{\frac{3}{2}}=\ln\sqrt{e^3}<\ln\sqrt{25}=\ln 5$.

$\therefore (1+\frac{2}{2e-1})(1+\frac{2}{2e^2-1})(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots(1+\frac{2}{2e^n-1})<5$. ……………………………12 分

22．解：（1）由题意得圆 C 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=9$.

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+6=0$. ………………………………………………4 分

$\because$ 圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{3\sqrt{3}+6}{2}>3$，

$\therefore$ 直线 l 和圆 C 相离. ………………………………………………………………5 分

（2）设 $P(3+3\cos\theta,3\sin\theta)$ $(\theta\in[0,2\pi))$.

由 $\frac{|3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta+6+3\sqrt{3}|}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore |2\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)+2+\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，则 $\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)=-1$. ……………………………7 分

$\therefore \frac{\pi}{6}+\theta=\pi$，则 $\theta=\frac{5\pi}{6}$， ………………………………………………8 分

$\therefore P(3-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$， …………………………………………………………9 分

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………10 分

23．解：（1）$f(x)=|x+2|+\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$

$\geqslant\left|(x+2)-(x+\frac{1}{2})\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|$ ……………………………3 分

$\geqslant\frac{3}{2}$.（当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，取等）……………………………………………4 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$. ……………………………………………………5 分

（2）$\because f(a)+f(b)+f(c)=18$，

$\therefore a+b+c=3$. ………………………………………………………………………6 分

由 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+3\geqslant 9$,

得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3$． ……………………………………………………………8 分

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，

$\therefore a^2+b^2+c^3\geqslant 3$． ……………………………………………………………9 分

$\therefore (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(a^2+b^2+c)\geqslant 9$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant \frac{9}{a^2+b^2+c^2}$． ……………………………………………………10 分