2022年全国统一高考数学试卷（新高考2卷）

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。

2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。

3．答非选择题时，必须使用0．5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。

5．考试结束后，只将答题卡交回。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|\le 1\}$,，则$A\cap B=$

A．$\{-1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{1,4\}$　　D．$\{-1,4\}$

【答案】B

【解析】方法一：通过解不等式可得集合$B=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$，则$A\cap B=\{1,2\}$，故选B．

方法二：代入排除法．$x=-1$代入集合$B=\{x\,|\,|x-1|\le 1\}$，可得$|x-1|=|-1-1|=2>1$，$x=-1$，不满足，排除A、D；$x=4$代入集合$B=\{x\,|\,|x-1|\le 1\}$，可得$|x-1|=|4-1|=3>1$，$x=4$，不满足，排除C． 故选B．

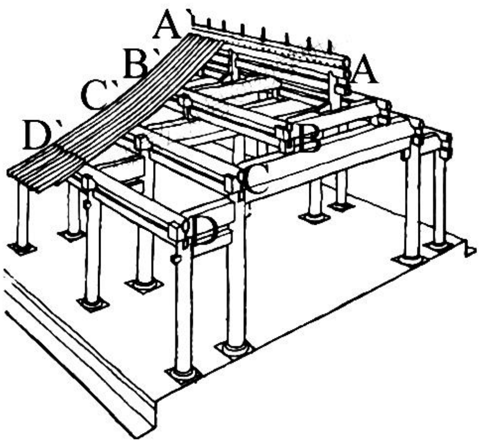
2．$(2+2i)(1-2i)=$

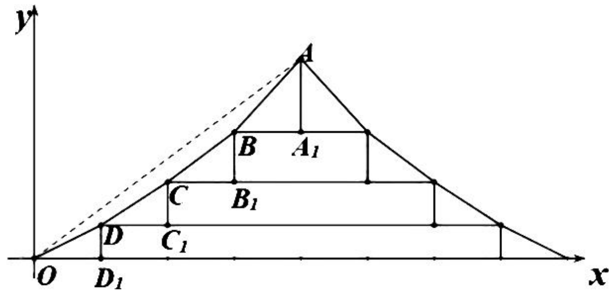
A．$-2+4i$　　B．$-2-4i$　　C．$6+2i$　　D．$6-2i$

【答案】D

【解析】$(2+2i)(1-2i)=2-4i+2i-4i^2=2-2i+4=6-2i$，故选D.

3．中国的古建筑不仅是挡风遮雨的住处，更是美学和哲学的体现．如图是某古建筑物的剖面图，其中DD_1,CC_1,BB_1,AA_1是举，OD_1,DC_1,CB_1,BA_1是相等的步，相邻桁的举步之比分别为$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5,\frac{CC_1}{DC_1}=k_1,\frac{BB_1}{CB_1}=k_2,\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$，已知$k_1,k_2,k_3$成公差为0.1的等差数列，且直线$OA$的斜率为0.725，则$k_3=$





A．0.75　　　　　　B．0.8　　　　　　C．0.85　　　　　　D．0.9

【答案】D

【解析】设OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1，则$CC_1=k_1$，$BB_1=k_2$，$AA_1=k_3$.

由题意得$k_3=k_1+0.2, k_3=k_2+0.1$

且$\dfrac{DD_1+CC_1+BB_1+AA_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}$=0.725

解得$k_3=0.9$

故选 D.

4．已知$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，$<\vec{a},\vec{c}>=<\vec{b},\vec{c}>$，则$t=$

A．-6　　　　　　B．-5　　　　　　C．5　　　　　　D．6

【答案】C

【解析】由已知有$\vec{c}=(3+t,4)$，$\cos<\vec{a},\vec{c}>=\cos<\vec{b},\vec{c}>$，故$\dfrac{9+3t+16}{|\vec{c}|\cdot 5}=\dfrac{3+t}{|\vec{c}|\cdot 1}$，

解得$t=5$. 故选 C.

5．有甲乙丙丁戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻的不同排列方式有多少种

A．12种　　　　B．24种　　　　C．36种　　　　D．48种

【答案】B

【解析】先利用捆绑法排乙丙丁戊四人，再用插空法选甲的位置，则有 $A_2^2A_3^3C_2^1=24$ 种．故选 B.

6．角 α,β 满足 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，则

A． $\tan(\alpha+\beta)=1$　　　　B． $\tan(\alpha+\beta)=-1$

C． $\tan(\alpha-\beta)=1$　　　　D． $\tan(\alpha-\beta)=-1$

【答案】D

【解析】解法一：设 $\beta=0$ 则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，排除 A，C；

再取 $\alpha=0$ 则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，排除 B；选 D.

解法二：由 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin[(\alpha+\frac{\pi}{4})+\beta]$

$=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

故 $\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta=\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

故 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta=0$，即 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta)=0$，

故 $\sin(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-\beta)=0$，

故 $\sin(\alpha-\beta)=-\cos(\alpha-\beta)$，故 $\tan(\alpha-\beta)=-1$．故选 D.

7．正三棱台高为 1，上下底边长分别是 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则球的表面积是

A．100π　　　　B．128π　　　　C．144π　　　　D．192π

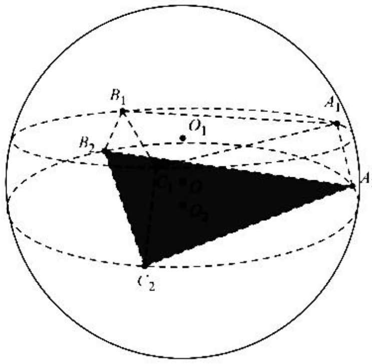
【答案】A

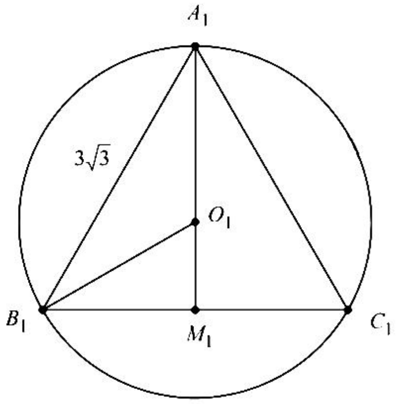
【解析】由题意得，上底面所在平面截球所得圆的半径是 3，

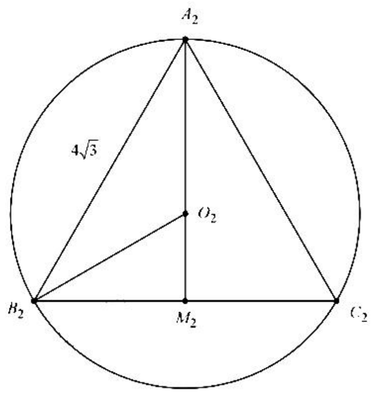
下底面所在平面截球所得圆的半径是 4，

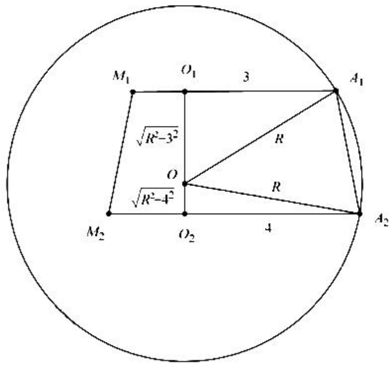
则轴截面中由几何知识可得 $\sqrt{R^2-3^2}+\sqrt{R^2-4^2}=1$，解得 $R^2=25$，

因此球的表面积是 $S=4\pi R^2=4\pi\cdot 25=100\pi$．故选 A.









8．若函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则$\sum_{k=1}^{22} f(k)=$

A．-3　　B．-2　　C．0　　D．1

【答案】A

【解析】令$y=1$得

$f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)\Rightarrow f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

故$f(x+2)=f(x+1)-f(x), f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$,

消去$f(x+2)$和$f(x+1)$得到$f(x+3)=-f(x)$，故$f(x)$周期为6；

令$x=1, y=0$得$f(1)+f(1)=f(1)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)=2$,

$f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$,

$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$,

$f(4)=f(3)-f(2)=-2-(-1)=-1,$

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-(-2)=1,$

$f(6)=f(5)-f(4)=1-(-1)=2$

故$\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=3\left[f(1)+f(2)+\cdots+f(6)\right]+f(19)+f(20)+f(21)+f(22)$

$$=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+(-1)+(-2)+(-1)=-3$$

即$\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=-3$. 故选 A.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象以 $(\frac{2\pi}{3},0)$ 中心对称，则

A． $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{5\pi}{12})$ 单调递减；

B． $y=f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12})$ 有 2 个极值点；

C．直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是一条对称轴；

D．直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是一条切线.

【答案】AD

【解析】由题意得：$f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=0$

所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$ 即：$\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi$ ，$k\in Z$

又$0<\varphi<\pi$，所以$k=1$时，$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$

故$f(x)=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$.

选项A：$x\in(0,\dfrac{5\pi}{12})$时$2x+\dfrac{2\pi}{3}\in(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2})$，由$y=\sin u$图象知$y=f(x)$是单调递减的；

选项B：$x\in(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12})$时$2x+\dfrac{2\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2})$，由$y=\sin u$图象知$y=f(x)$只有1个极值点，由$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}$可解得极值点；

选项C：$x=\dfrac{7\pi}{6}$时$2x+\dfrac{2\pi}{3}=3\pi$，$y=f(x)=0$，直线$x=\dfrac{7\pi}{6}$不是对称轴；

选项D：由$y'=2\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})=0$得：$\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}$，

解得$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$或$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$

从而得：$x=k\pi$或$x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$

所以函数$y=f(x)$在点$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$处的切线斜率为$k=y'|_{x=0}=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$，

切线方程为：$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$即$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x$.

10．已知O为坐标原点，过抛物线C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点F的直线与C交于A，B两点，点A在第一象限，点$M\left(p,0\right)$，若$\left|AF\right|=\left|AM\right|$，则直线$AB$的斜率为$2\sqrt{6}$

A．直线AB的斜率为$2\sqrt{6}$　　B．$\left|OB\right|=\left|OF\right|$

C．$\left|AB\right|>4\left|OF\right|$　　D．$\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$

【答案】ACD

【解析】选项 A：设 FM 中点为 N，则 $x_A = x_N = \dfrac{\dfrac{p}{2}+p}{2} = \dfrac{3}{4}p$, 所以

$y_A^2 = 2px_A = 2p\cdot\dfrac{3}{4}p = \dfrac{3}{2}p^2\left(y_A > 0\right)$, 所以 $y_A = \dfrac{\sqrt{6}}{2}p$, 故 $k_{AB} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{2}p}{\dfrac{3}{4}p-\dfrac{p}{2}} = 2\sqrt{6}.$

选项 B：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|} = \dfrac{2}{p} \Rightarrow \dfrac{1}{\dfrac{3}{4}p+\dfrac{p}{2}}+\dfrac{1}{|BF|} = \dfrac{2}{p} \Rightarrow |BF| = \dfrac{5}{6}p = x_B+\dfrac{p}{2} \Rightarrow x_B = \dfrac{p}{3}$ 所以

$y_B^2 = 2p\cdot\dfrac{p}{3} = \dfrac{2p^2}{3}$. 所以 $|OB| = x_B^2+y_B^2 = \dfrac{p^2}{9}+\dfrac{2p^2}{3} = \dfrac{7p^2}{9} \neq \dfrac{p^2}{4}.$

选项 C：$|AB| = \dfrac{3}{4}p+\dfrac{p}{3}+p = \dfrac{25}{12}p > 2p = 4|OF|.$

选项 D：由选项 A, B 知 $A\left(\dfrac{3}{4}p, \dfrac{\sqrt{6}}{2}p\right), B\left(\dfrac{p}{3}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}p\right)$, 所以

$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \left(\dfrac{3}{4}p, \dfrac{\sqrt{6}}{2}p\right)\cdot\left(\dfrac{p}{3}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}p\right) = \dfrac{p^2}{4}-p^2 = -\dfrac{3}{4}p^2 < 0$, 所以 $\angle AOB$ 为钝角；

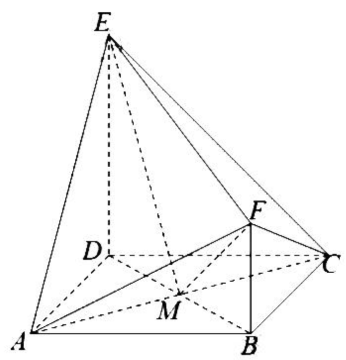
又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(-\dfrac{p}{4}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}p\right)\cdot\left(-\dfrac{p}{3}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}p\right) = \dfrac{p^2}{12}-p^2 = -\dfrac{11}{12}p^2 < 0$, 所以 $\angle AMB$ 为钝角；

所以 $\angle OAM+\angle OBM < 180°$.

故选 ACD.

11．如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB /\!/ ED$，$AB = ED = 2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 的体积分别为 V_1，V_2，V_3，则

A．$V_3 = 2V_2$　　B．$V_3 = V_1$　　C．$V_3 = V_1+V_2$　　D．$2V_3 = 3V_1$



【答案】CD

【解析】设 $AB=ED=2FB=2$，则 $V_1=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，$V_2=\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{2}{3}$．连结 BD 交 AC 于 M，连结 EM、FM，则 $FM=\sqrt{3}$，$EM=\sqrt{6}$，$EF=3$，故 $S_{\triangle EMF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$V_3=\frac{1}{3}S_{\triangle EMF}\times AC=2$，$V_3=V_1+V_2$，$2V_3=3V_1$，故选 CD.

12．对任意 $x,y,x^2+y^2-xy=1$，则

A．$x+y\le 1$　　B．$x+y\ge -2$　　C．$x^2+y^2\le 2$　　D．$x^2+y^2\ge 1$

【答案】BC

【解析】由 $x^2+y^2-xy=1$ 得 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=1$

令 $\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta \\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta \end{cases}$

故 $x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,2]$，故 A 错，B 对；

$$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos 2\theta+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin(2\theta-\varphi)+\frac{4}{3}\in\left[\frac{2}{3},2\right],\ (\text{其中}\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}),$$

故 C 对，D 错.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X\leqslant 2.5)=0.36$，则 $P(X>2.5)=$______.

【答案】0．14

【解析】由题意可知，$P(X>2)=0.5$，故 $P(X>2.5)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 2.5)=0.14$．

14．写出曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的切线方程：______，______.

【答案】$y=\frac{x}{\mathrm{e}}$，$y=-\frac{x}{\mathrm{e}}$

【解析】当 $x>0$ 时，点 $(x_1,\ln x_1)$ $(x_1>0)$ 上的切线为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$．若该切线经过原点，则 $\ln x_1-1=0$，解得 $x=\mathrm{e}$，此时切线方程为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$.

当 $x<0$ 时，点 $(x_2,\ln(-x_2))$ $(x_2<0)$ 上的切线为 $y-\ln(-x_2)=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$．若该切线经过原点，则 $\ln(-x_2)-1=0$，解得 $x=-\mathrm{e}$，此时切线方程为 $y=-\frac{x}{\mathrm{e}}$．

15．已知点 $A(-2,3)$，$B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 的对称直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 存在公共点，则实数 a 的取值范围为__________．

【答案】$[\frac{1}{3},\frac{3}{2}]$

【解析】因为 $k_{AB}=\frac{a-3}{2}$，所以 AB 关于直线 $y=a$ 的对称直线为 $(3-a)x-2y+2a=0$，

所以 $\frac{|3(a-3)+4+2a|}{\sqrt{4+(3-a)^2}}\leqslant 1$，整理可得 $12a^2-22a+6\leqslant 0$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$．

16．已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，直线 l 与椭圆在第一象限交于 A，B，与 x 轴，y 轴分别交于 M，N，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为__________．

【答案】$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

【解析】取 AB 的中点为 E，因为 $|MA|=|NB|$，所以 $|ME|=|NE|$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

可得 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$，即 $k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$．设直线 $AB:y=kx+m$，$k<0,m>0$，

令 $x=0$，$y=m$，令 $y=0$，$x=-\frac{m}{k}$，所以 $E(-\frac{m}{2k},\frac{m}{2})$，所以 $k\times\frac{m}{\frac{-m}{k}}=-k^2=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$m^2+2m^2=12$，$m=2$，所以直线 $AB:y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$，即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$

（1）证明：$a_1=b_1$；

（2）求集合 $\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$ 中元素的个数．

【答案】（1）见解析；（2）9．

【解析】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d

由 $a_2-b_2=a_3-b_3$，知 $a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1$，故 $d=2b_1$

由 $a_2-b_2=b_4-a_4$，知 $a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)$，

故 $a_1+d-2b_1=4d-(a_1+3d)$；故 $a_1+d-2b_1=d-a_1$，整理得 $a_1=b_1$，得证.

（2）由（1）知 $d=2b_1=2a_1$，由 $b_k=a_m+a_1$ 知：$b_1\cdot 2^{k-1}=a_1+(m-1)\cdot d+a_1$

即 $b_1\cdot 2^{k-1}=b_1+(m-1)\cdot 2b_1+b_1$，即 $2^{k-1}=2m$，

因为 $1\leqslant m\leqslant 500$，故 $2\leqslant 2^{k-1}\leqslant 1000$，解得 $2\leqslant k\leqslant 10$

故集合 $\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$ 中元素的个数为 9 个.

18.（12 分）

记 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A、B、C，其对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1，S_2，S_3，已知 $S_1-S_2+S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$.

（1）求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）若 $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，求 b.

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$；（2）$\dfrac{1}{2}$.

【解析】（1）$\because$ 边长为 a 的正三角形的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$\therefore S_1-S_2+S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-b^2+c^2\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $ac\cos B=1$，

由 $\sin B=\dfrac{1}{3}$ 得：$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore ac=\dfrac{1}{\cos B}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

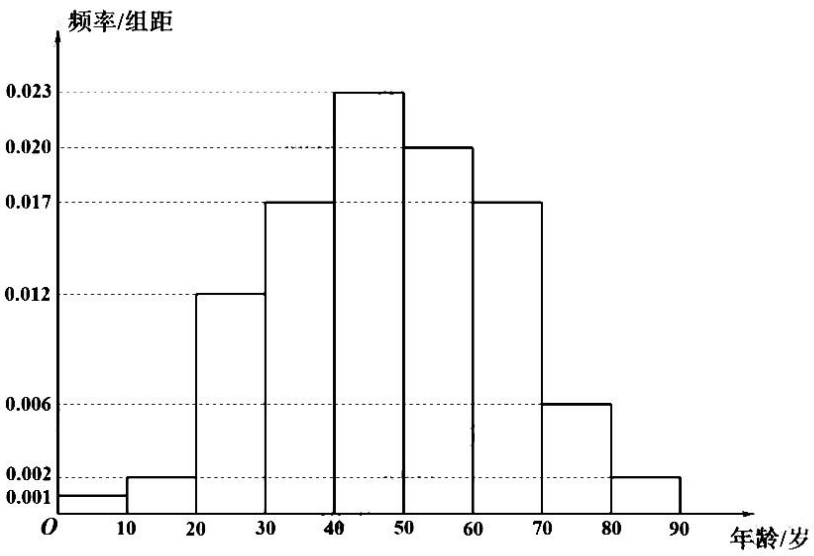
故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

（2）由正弦定理得：$\dfrac{b^2}{\sin^2 B}=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{ac}{\sin A\sin C}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{9}{4}$，

故 $b=\dfrac{3}{2}\sin B=\dfrac{1}{2}$.

19.（12 分）

在某地区进行流行病调查，随机调查了 100 名某种疾病患者的年龄，得到如下的样本数据频率分布直方图.



（1）估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）

（2）估计该地区一人患这种疾病年龄在区间 $[20,70)$ 的概率.

（3）已知该地区这种疾病的患病率为 0.1%，该地区的年龄位于区间 $[40,50)$ 的人口占该地区总人口的 16%，从该地区任选一人，若此人年龄位于区间 $[40,50)$，求此人患该种疾病的概率.（样本数据中的患者年龄位于各地区的频率作为患者年龄位于该区间的概率，精确到 0.0001）

【答案】(1) 47．9 岁；(2) 0．89；(3) 0．0014.

【解析】（1）平均年龄 $\overline{x}=(5\times0.001+15\times0.002+25\times0.012+35\times0.017+45\times0.023$

$+55\times0.020+65\times0.017+75\times0.006+85\times0.002)\times10=47.9$（岁）

（2）设 $A=\{$一人患这种疾病的年龄在区间$[20,70)\}$，则

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.001+0.002+0.006+0.002)\times10=1-0.11=0.89$

（3）设 $B=\{$任选一人年龄位于区间$[40,50)\}$，$C=\{$任选一人患这种疾病$\}$，

则由条件概率公式，得

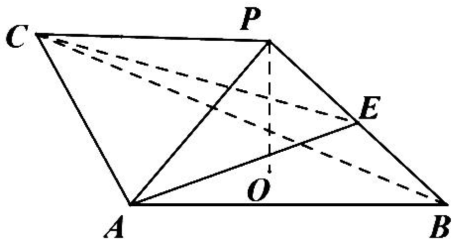
$$P(C\mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{0.1\%\times0.023\times10}{16\%}=\frac{0.001\times0.23}{0.16}=0.0014375\approx0.0014$$

20（12 分）

如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 是 PB 的中点，

（1）求证：$OE//$ 平面 PAC；

（2）若 $\angle ABO=\angle CBO=30^\circ$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值.



【答案】（1）见解析；（2）$\frac{11}{13}$.

【解析】（1）法一：连接OA、OB，

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，所以$PO\perp OA$，$PO\perp OB$，

所以$\angle POA=\angle POB=90^{\circ}$，又$PA=PB$，$PO=PO$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$，所以$OA=OB$，

作AB中点D，连接OD、DE，则有$OD\perp AB$，又$AB\perp AC$，所以$OD/\!/AC$，

又因为$OD\not\subset$平面PAC，$AC\subset$平面PAC，所以$OD/\!/$平面PAC，

又D、E分别为AB、PB的中点，所以，在$\triangle BPA$中，$DE/\!/PA$

又因为$DE\not\subset$平面PAC，$PA\subset$平面PAC，所以$DE/\!/$平面PAC，

又OD、$DE\subset$平面ODE，$OD\cap DE=D$，所以平面$ODE/\!/$平面PAC，

又$OE\subset$平面ODE，所以$OE/\!/$平面PAC；

法二：（1）连接OA、OB，

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，所以$PO\perp OA$，$PO\perp OB$，

所以$\angle POA=\angle POB=90^{\circ}$，又$PA=PB$，$PO=PO$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$，

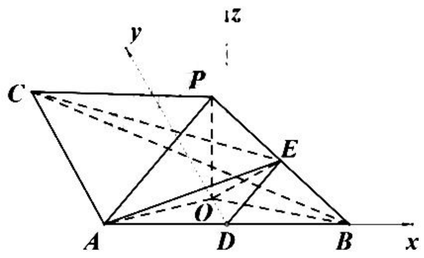
所以$OA=OB$，又$AB\perp AC$，在$Rt\triangle ABF$中，O为BF中点，

延长BO，交AC于F，连接PF，

所以在$\triangle PBF$中，O、E分别为BF、PB的中点，所以$EO/\!/PF$，

因为$EO\not\subset$平面PAC，$PF\subset$平面PAC，所以$EO/\!/$平面PAC；

（2）法一：过点D作$DF/\!/OP$，以DB为x轴，DO为y轴，DF为z轴．建立如图所示的空间直角坐标系．



因为$PO=3$，$PA=5$，由（1）$OA=OB=4$，

又$\angle ABO=\angle CBO=30°$，所以$OD=2$，$DB=2\sqrt{3}$，所以$P(0,2,3)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，

$A(-2\sqrt{3},0,0)$，$E(\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$，设$AC=a$，则$C(-2\sqrt{3},a,0)$，

平面AEB的法向量设为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，直线$AB$的方向向量可设为$\vec{a}=(1,0,0)$，

直线$DP\subset$平面AEB，直线DP的方向向量为$\vec{b}=(0,2,3)$

$\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=0\\ 2y+3z=0\end{cases}$，

所以$x=0$，设$y=3$，则$z=-2$，

所以$\overrightarrow{n_1}=(0,3,-2)$；

平面AEC的法向量设为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AC}=(0,a,0)$，$\overrightarrow{AE}=(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}ay=0\\ 3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，所以$y=0$，设$x=\sqrt{3}$，则$z=-6$，

所以$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},0,-6)$；

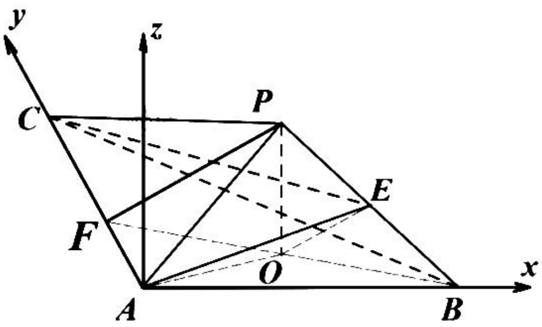
所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=\frac{12}{13\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{13}$

二面角$C-AE-B$的平面角为θ，则$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$，

所以二面角$C-AE-B$的正弦值为$\frac{11}{13}$

法二：（2）过点A作$AF\parallel OP$，以AB为x轴，AC为y轴，AF为z轴

建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $PO=3$，$PA=5$，由（1）$OA=OB=4$，

又 $\angle ABO=\angle CBO=30°$，所以，$AB=4\sqrt{3}$，所以 $P(2\sqrt{3},2,3)$，$B(4\sqrt{3},0,0)$，

$A(0,0,0)$，$E(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$，设 $AC=a$，则 $C(0,a,0)$，

平面 AEB 的法向量设为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}4\sqrt{3}x=0\\ 3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，所以 $x=0$，设 $z=-2$，则 $y=3$，

所以 $\overrightarrow{n_1}=(0,3,-2)$；

平面 AEC 的法向量设为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AC}=(0,a,0)$，$\overrightarrow{AE}=(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2})$

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}ay=0\\ 3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，所以 $y=0$，设 $x=\sqrt{3}$，则 $z=-6$，

所以 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},0,-6)$；

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=\frac{12}{13\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{13}$

二面角 $C-AE-B$ 的平面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$，

所以二面角 $C-AE-B$ 的正弦值为 $\frac{11}{13}$。

21．（12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$．

（1）求 C 的方程；

（2）过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A,B 两点，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 在 C 上，且 $x_1>x_2>0$，$y_1>0$，过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M．请从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个条件成立：

① M 在 AB 上；② $PQ\parallel AB$；③ $|MA|=|MB|$．

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

【答案】（1）$\frac{x^2}{3}-y^2=1$；（2）见解析．

【解析】（1）由题意可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\sqrt{a^2+b^2}=2$，故 $a=1$，$b=\sqrt{3}$．

因此 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$．

（2）设直线 PQ 的方程为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，将直线 PQ 的方程代入 C 的方程得

$(3-k^2)x^2-2kbx-b^2-3=0$

则 $x_1+x_2=\frac{2kb}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\frac{b^2+3}{3-k^2}$，$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3(b^2+3-k^2)}}{3-k^2}$．

设点 M 的坐标为 (x_M,y_M)，则 $\begin{cases}y-y_1=-\sqrt{3}(x_M-x_1)\\ y-y_2=\sqrt{3}(x_M-x_2)\end{cases}$．

两式相减，得 $y_1-y_2=2\sqrt{3}x_M-\sqrt{3}(x_1+x_2)$，而 $y_1-y_2=(kx_1+b)-(kx_2+b)=k(x_1-x_2)$，

故 $2\sqrt{3}x_M=k(x_1-x_2)+\sqrt{3}(x_1+x_2)$，解得 $x_M=\frac{k\sqrt{b^2+3-k^2}+kb}{3-k^2}$．

两式相加，得 $2y_M-(y_1+y_2)=\sqrt{3}(x_1-x_2)$，

而 $y_1+y_2=(kx_1+b)+(kx_2+b)=k(x_1+x_2)+2b$，故 $2y_M=k(x_1+x_2)+\sqrt{3}(x_1-x_2)+2b$，解得 $x_M=\frac{3\sqrt{b^2+3-k^2}+3b}{3-k^2}=\frac{3}{k}x_M$．

因此，点 M 的轨迹为直线 $y=\frac{3}{k}x$，其中 k 为直线 PQ 的斜率．

若选择①②：

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，并设 A 的坐标为 (x_A,y_A)，B 的坐标为 (x_B,y_B)．则

$\begin{cases}y_A=k(x_A-2)\\ y_A=\sqrt{3}x_A\end{cases}$，解得 $x_A=\frac{2k}{k-\sqrt{3}}$，$y_A=\frac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$．

同理可得 $x_B=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}}$， $y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$．

此时 $x_A+x_B=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$， $y_A+y_B=\dfrac{12k}{k^2-3}$．

而点 M 的坐标满足 $\begin{cases} y_M=k(x_M-2) \\ y_M=\dfrac{3}{k}x_M \end{cases}$，解得 $x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=\dfrac{x_A+x_B}{2}$，$y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=\dfrac{y_A+y_B}{2}$，

故 M 为 AB 的中点，即 $|MA|=|MB|$．

若选择①③：

当直线 AB 的斜率不存在时，点 M 即为点 $F(2,0)$，此时 M 不在直线 $y=\dfrac{3}{k}x$ 上，矛盾．

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)$ $(m\neq 0)$，并设 A 的坐标为

(x_A,y_A)， B 的坐标为 (x_B,y_B)．则 $\begin{cases} y_A=m(x_A-2) \\ y_A=\sqrt{3}x_A \end{cases}$，解得 $x_A=\dfrac{2m}{k-\sqrt{3}}$， $y_A=\dfrac{2\sqrt{3}m}{k-\sqrt{3}}$．

同理可得 $x_B=\dfrac{2m}{m+\sqrt{3}}$， $y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}m}{m+\sqrt{3}}$．

此时 $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2m^2}{m^2-3}$， $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{6m}{m^2-3}$．

由于点 M 同时在直线 $y=\dfrac{3}{k}x$ 上，故 $6m=\dfrac{3}{k}\cdot 2m^2$，解得 $k=m$．因此 $PQ\,/\!/\,AB$．

若选择②③：

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，并设 A 的坐标为 (x_A,y_A)， B 的坐标为 (x_B,y_B)．则

$\begin{cases} y_A=k(x_A-2) \\ y_A=\sqrt{3}x_A \end{cases}$，解得 $x_A=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}}$， $y_A=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$．

同理可得 $x_B=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}}$， $y_B=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$．

设 AB 的中点为 $C(x_C,y_C)$，则 $x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$， $y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{6k}{k^2-3}$．

由于 $|MA|=|MB|$，故 M 在 AB 的垂直平分线上，即点 M 在直线 $y-y_C=-\dfrac{1}{k}(x-x_C)$ 上．

将该直线与 $y=\dfrac{3}{k}x$ 联立，解得 $x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=x_C$， $y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=y_C$，即点 M 恰为 AB 中点．故点 M 在直线 AB 上．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=xe^{ax}-e^x$．

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；

（3）设$n\in N^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>ln\,(n+1)$.

【答案】（1）见解析；（2）$a\le\frac{1}{2}$；（3）见解析.

【解析】（1）$a=1\Rightarrow f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=(x-1)\mathrm{e}^x\Rightarrow f^{'}(x)=x\mathrm{e}^x$

当$x\in(-\infty，0)$时，$f^{'}(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0，+\infty)$时，$f^{'}(x)>0$，$f(x)$单调递增.

（2）令$g(x)=f(x)+1=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x+1(x\ge 0)$

$\Rightarrow g(x)\le g(0)=0$ 对$\forall x\ge 0$ 恒成立

又$g^{'}(x)=\mathrm{e}^{ax}+ax\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x\Rightarrow g^{'}(0)=0$

令$h(x)=g^{'}(x)\Rightarrow h^{'}(x)=a\mathrm{e}^{ax}+a(\mathrm{e}^{ax}+ax\mathrm{e}^{ax})-\mathrm{e}^x=a(2\mathrm{e}^{ax}+ax\mathrm{e}^{ax})-\mathrm{e}^x$

则$h^{'}(0)=2a-1$

① 若$h^{'}(0)=2a-1>0$，即$a>\frac{1}{2}$，$h^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g^{'}(x)-g^{'}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g^{'}(x)}{x}>0$

所以$\exists x_0>0$，使得当$x\in(0，x_0)$时，有$\frac{g^{'}(x)}{x}>0\Rightarrow g^{'}(x)>0\Rightarrow g(x)$单调递增

$\Rightarrow g(x_0)>g(0)=0$，矛盾

② 若$h^{'}(0)=2a-1\le 0$，即$a\le\frac{1}{2}$时，

$g^{'}(x)=\mathrm{e}^{ax}+ax\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{ax+\ln(1+ax)}-\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}-\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x=0$

$\Rightarrow g(x)$在$[0，+\infty)$上单调递减，$g(x)\le g(0)=0$，符合题意.

综上所述，实数a的取值范围是$a\le\frac{1}{2}$.

（3）求导易得$t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$

令$t=\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>2\ln\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\ln(n+1)$$

即$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$，证毕