

## 2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考 I 卷）

### 数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$ ， $N = \{x | 3x \geq 1\}$ ，则  $M \cap N =$

A.  $\{x | 0 \leq x < 2\}$

B.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$

C.  $\{x | 3 \leq x < 16\}$

D.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

【答案】D

【解析】集合  $M = \{x | 0 \leq x < 16\}$ ，集合  $N = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$ ， $M \cap N = \{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$ 。

故选 D。

2. 若  $i(1-z) = 1$ ，则  $z + \bar{z} =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】对原式两边同时乘以  $i$  得： $z - 1 = i$ ，即  $z = 1 + i$ ，所以  $\bar{z} = 1 - i$ ，即  $z + \bar{z} = 2$ 。故选 D。

3. 在  $\triangle ABC$  中，点  $D$  在边  $AB$  上， $BD = 2DA$ 。记  $\overrightarrow{CA} = m$ ， $\overrightarrow{CD} = n$ ，则  $\overrightarrow{CB} =$

A.  $3m - 2n$

B.  $-2m + 3n$

C.  $3m + 2n$

D.  $2m + 3n$

【答案】B

【解析】因为  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AD}$ ，又因为  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ ，所以  $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CD}$ ，即  $\overrightarrow{CB} = -2m + 3n$ 。故选 B。



$f(\frac{3\pi}{2})=2$ , 所以  $\sin(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4})+2=2$ , 则  $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}=2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ; 解得  $\omega = \frac{8k-1}{6}$ , 由  $\omega \in (2,3)$  得  $k=2$ ,  $\omega = \frac{5}{2}$ , 故  $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) + 2 = -1 + 2 = 1$ .

7. 设  $a=0.1e^{0.1}$ ,  $b=\frac{1}{9}$ ,  $c=-\ln 0.9$ , 则

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $c < a < b$       D.  $a < c < b$

【答案】C

【解析】令  $a = xe^x$ ,  $b = \frac{x}{1-x}$ ,  $c = -\ln(1-x)$ ,

$$\textcircled{1} \ln a - \ln b = x + \ln x - [\ln x - \ln(1-x)],$$

$$y = x + \ln(1-x), x \in (0,0.1]; \quad y' = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0,$$

所以  $y \leq 0$ , 所以  $\ln a - \ln b \leq 0$ , 所以  $b > a$

$$\textcircled{2} a - c = xe^x + \ln(1-x), x \in (0,0.1],$$

$$y' = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x},$$

$$\text{令 } k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1, \text{ 所以 } k'(x) = (1-x^2 - 2x)e^x > 0,$$

所以  $k(x) > k(0) > 0$ , 所以  $y' > 0$ ,

所以  $a - c > 0$ , 所以  $a > c$ .

8. 已知正四棱锥的侧棱长为  $l$ , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为  $36\pi$ , 且

$3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ , 则该正四棱锥体积的取值范围是

- A.  $[18, \frac{81}{4}]$       B.  $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$       C.  $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$       D.  $[18, 27]$

【答案】C

【解析】记三棱锥高与侧棱夹角为  $\theta$ , 高为  $h$ , 底面中心到各顶点的距离为  $m$ ,

$$\cos \theta = \frac{3^2 + l^2 - 3^2}{2 \times 3 \times l} = \frac{l}{6} \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}], \text{ 则 } l = 6 \cos \theta, \quad m = l \cdot \sin \theta = 6 \sin \theta \cos \theta,$$

$$h = \frac{m}{\tan \theta} = \frac{6 \sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = 6 \cos^2 \theta, \quad S_{\text{底}} = \frac{1}{2} \times 2m \times 2m = 2m^2,$$

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2m^2 h = 144(\sin \theta \cos^2 \theta)^2,$$

$$\text{令 } y = \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) = x(1 - x^2) = -x^3 + x, x = \sin \theta \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$y' = -3x^2 + 1, \text{ 故 } x \in [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}), y' < 0, x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}], y' > 0,$$

$$\text{即 } V_{\max} = 144y_{\max}^2 = 144 \times [\frac{\sqrt{3}}{3} \times (\frac{\sqrt{6}}{3})^2]^2 = \frac{64}{3},$$

$$V_{\min} = 144 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} \times (\frac{1}{2})^2)^2 = \frac{27}{4}.$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，则

- A. 直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角为  $90^\circ$
- B. 直线  $BC_1$  与  $CA_1$  所成的角为  $90^\circ$
- C. 直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为  $45^\circ$
- D. 直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$

【答案】ABD

【解析】在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，因为  $BC_1 \perp B_1C$ ， $BC_1 \perp A_1B_1$ ，所以  $BC_1 \perp$  平面  $A_1B_1CD$ ，所以  $BC_1 \perp DA_1$ ， $BC_1 \perp CA_1$ ，故选项 A、B 均正确；

设  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，因为  $A_1C_1 \perp$  平面  $BB_1D_1D$ ，所以直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为

$$\angle C_1BO, \text{ 在直角 } \triangle C_1BO \text{ 中，} \sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \angle C_1BO = 30^\circ, \text{ 故选项 C 错误；}$$

直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故选项 D 正确。综上，答案选 ABD。

10. 已知函数  $f(x) = x^3 - x + 1$ ，则

- A.  $f(x)$  有两个极值点
- B.  $f(x)$  有三个零点
- C. 点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心
- D. 直线  $y = 2x$  是曲线  $y = f(x)$  的切线

【答案】AC

$$\text{【解析】} f'(x) = 3x^2 - 1, \text{ 所以 } f(x) \text{ 有两个极值点 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 与 } \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \neq 0,$$

所以  $f(x)$  只有一个零点；由  $f(x) + f(-x) = 2$  可知，点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心；曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程为  $y = 2x - 1$ ，所以答案选 AC。

11. 已知  $O$  为坐标原点，点  $A(1, 1)$  在抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 上，过点  $B(0, -1)$  的直线

交  $C$  于  $P, Q$  两点，则

- A.  $C$  的准线为  $y = -1$
- B. 直线  $AB$  与  $C$  相切



C.  $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D.  $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

【答案】BCD

【解析】由题意可知： $1=2p$ ，所以抛物线  $C: x^2 = y$ ，故  $C$  的准线为  $y = -\frac{1}{4}$ ，故 A 不对；

由  $y' = 2x$  得曲线  $C$  在点  $A(1, 1)$  处的切线斜率为 2，所以切线方程为  $y = 2x - 1$ ，故直线  $AB$  与  $C$  相切；

过点  $B(0, -1)$  的直线设为  $y = kx - 1$ ，交  $C$  于  $P, Q$  两点的坐标分别设为  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y = kx - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - kx + 1 = 0, \text{ 所以有 } x_1 + x_2 = k, x_1x_2 = 1,$$

且  $\Delta = k^2 - 4 > 0$ ，即  $k^2 > 4$ ，进一步可得  $y_1 + y_2 = k^2 - 2, y_1y_2 = -1$ ，此时

$$|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(y_1 + y_1^2)(y_2 + y_2^2)} = \sqrt{y_1y_2(y_1y_2 + y_1 + y_2 + 1)} = \sqrt{k^2} > 4$$

又  $|OA|^2 = 2$ ，所以 C 正确；

$$|BP| \cdot |BQ| = \overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (x_1 + y_1 + 1)(x_2 + y_2 + 1) = x_1x_2 + y_1y_2 + y_1 + y_2 + 1 = k^2 + 1 > 5, \text{ 又}$$

$|BA|^2 = 5$ ，故 D 正确；综上，答案选 BCD.

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ ，记  $g(x) = f(x) - f(\frac{3}{2} - 2x)$ ， $g(2+x)$  均为偶函数，则

A.  $f(0) = 0$

B.  $g(-\frac{1}{2}) = 0$

C.  $f(-1) = f(4)$

D.  $g(-1) = g(2)$

【答案】BC

【解析】由  $f(\frac{3}{2} - 2x)$  为偶函数可知  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{3}{2}$  对称，

由  $g(2+x)$  为偶函数可知： $g(x)$  关于直线  $x = 2$  对称，

结合  $g(x) = f'(x)$ ，根据  $g(x)$  关于直线  $x = 2$  对称可知  $f(x)$  关于点  $(2, t)$  对称，

根据  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{3}{2}$  对称可知： $g(x)$  关于点  $(\frac{3}{2}, 0)$  对称，

综上，函数  $f(x)$  与  $g(x)$  均是周期为 2 的周期函数，所以有  $f(0) = f(2) = t$ ，所以 A 不正确；

$f(-1) = f(1), f(4) = f(2), f(1) = f(2)$ ，故  $f(-1) = f(4)$ ，所以 C 正确。

$g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{3}{2}) = 0, g(-1) = g(1)$ ，所以 B 正确；

又  $g(1) + g(2) = 0$ ，所以  $g(-1) + g(2) = 0$ ，所以 D 不正确。

故选 BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^8$  的展开式中  $x^2y^6$  的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).

【答案】 -28

【解析】原式等于  $(x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$ , 由二项式定理, 其展开式中  $x^2y^6$  的系数为  $C_8^2 - C_8^3 = -28$ .

14. 写出与圆  $x^2 + y^2 = 1$  和  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$  都相切的一条直线的方程\_\_\_\_\_.

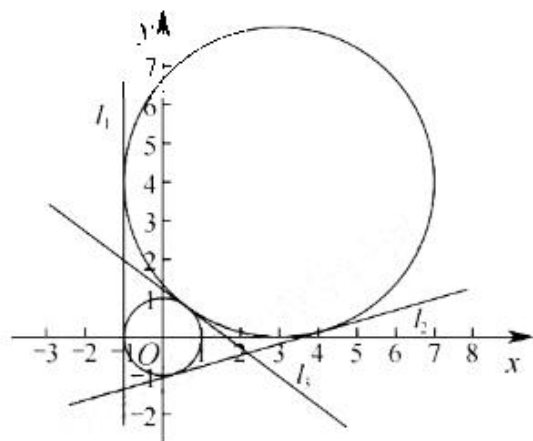
【答案】  $x = -1$ , 或  $y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$ , 或  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$  (答对其中之一即可)

【解析】由图可得, 两圆外切, 且均与直线  $l_1: x = -1$  相切. 另过两圆圆心的直线  $l$  的方程为  $y = \frac{4}{3}x$ , 可得  $l$  与  $l_1$  交点为  $P(-1, -\frac{4}{3})$ . 由切线定理得, 两圆另一公切线  $l_2$  过点  $P$ , 设

$l_2: y + \frac{4}{3} = k(x+1)$ , 由点到直线距离公式可得  $\frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ , 解得  $k = \frac{7}{24}$ , 即

$l_2: y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$ . 另由于两圆外切, 因此在公切点处存在公切线  $l_3$  与  $l$  垂直, 解得

$l_3: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ .



15. 若曲线  $y = (x+a)e^x$  有两条过坐标原点的切线, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

**【解析】** 易得曲线不过原点, 设切点为  $(x_0, (x_0+a)e^{x_0})$ , 则切线斜率为

$f'(x_0) = (x_0+a+1)e^{x_0}$ . 可得切线方程为  $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$ , 又切线过原点,

可得  $-(x_0+a)e^{x_0} = -x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$ , 化简得  $x_0^2 + ax_0 - a = 0$  (\*), 又切线有两条, 即\*

方程有两不等实根, 由判别式  $\Delta = a^2 + 4a > 0$ , 得  $a < -4$ , 或  $a > 0$ .

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $C$  的上顶点为  $A$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与  $C$  交于  $D, E$  两点,  $|DE| = 6$ , 则  $\triangle ADE$  的周长是\_\_\_\_\_.

【答案】13

【解析】椭圆离心率为  $\frac{1}{2}$ , 不妨设  $C: \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ , 且  $\triangle AF_1F_2$  为正三角形, 则直线

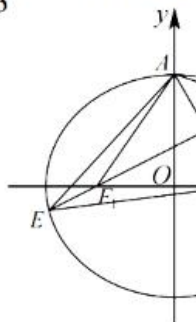
$DE$  斜率  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 由等腰三角形性质可得,  $|AE| = |EF_2|$ ,  $|AD| = |DF_2|$ , 由椭圆性质得

$\triangle ADE$  的周长等价于  $|DE| + |DF_2| + |EF_2| = 4a$ . 另设直线  $DE$  方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$ , 与椭圆

方程联立得  $13x^2 + 8cx - 32c^2 = 0$ .

由弦长公式  $|DE| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$  得

$$|DE| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8c}{13}\right)^2 + \frac{128c^2}{13}} = \frac{48}{13}c = 6, \text{ 即 } c = \frac{13}{8}, 4a = 8c = 13.$$



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 = 1$ ,  $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$  是公差为  $\frac{1}{3}$  的等差数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 证明:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ .

【解析】(1)  $S_1 = a_1 = 1$ , 所以  $\frac{S_1}{a_1} = 1$ ,

所以  $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$  是首项为 1, 公差为  $\frac{1}{3}$  的等差数列,

所以  $\frac{S_n}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n+2}{3}$ , 所以  $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$ .

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3}a_n - \frac{n+1}{3}a_{n-1}$ ,

所以  $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$ , 即  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} (n \geq 2)$ ;

累积法可得:  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n \geq 2)$ , 又  $a_1 = 1$  满足该式,



所以  $\{a_n\}$  得通项公式为  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} &= 2\left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2. \end{aligned}$$

18. (12分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ .

(1) 若  $C = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $B$ ;

(2) 求  $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$  的最小值.

【解析】(1) 由已知条件得:  $\sin 2B + \sin A \sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B$

$$\begin{aligned} \sin 2B &= \cos A + \cos A \cos 2B - \sin A \sin 2B = \cos A + \cos(A + 2B) \\ &= \cos[\pi - (B + C)] + \cos[\pi - (B + C) + 2B] \\ &= -\cos(B + C) + \cos[\pi + (B - C)] \\ &= -2\cos B \cos C \end{aligned}$$

所以  $2\sin B \cos B = -2\cos B \cos C$ , 即  $(\sin B + \cos C)\cos B = 0$ .

由已知条件:  $1 + \cos 2B \neq 0$ , 则  $B \neq \frac{\pi}{2}$ , 可得  $\cos B \neq 0$ ,

所以  $\sin B = -\cos C = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{\pi}{6}$ .

(2) 由(1)知  $\sin B = -\cos C > 0$ , 则  $B = C - \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin B = \sin(C - \frac{\pi}{2}) = -\cos C$ ,

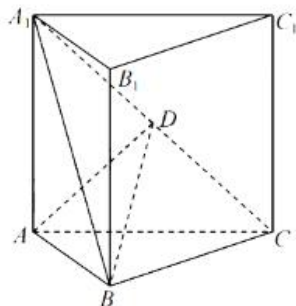
$$\sin A = \sin(B + C) = \sin(2C - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2C,$$

$$\begin{aligned} \text{由正弦定理 } \frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= \frac{(1 - 2\sin^2 C)^2 + (1 - \sin^2 C)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 + 4\sin^4 C - 5\sin^2 C}{\sin^2 C} = \frac{2}{\sin^2 C} + 4\sin^2 C - 5 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{2}{\sin^2 C} \cdot 4\sin^2 C} - 5 = 4\sqrt{2} - 5, \end{aligned}$$

当且仅当  $\sin^2 C = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时等号成立, 所以  $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$  的最小值为  $4\sqrt{2} - 5$ .

19. (12分)

如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为 4,  $\triangle A_1BC$  的面积为  $2\sqrt{2}$ .



(1) 求  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离;

(2) 设  $D$  为  $A_1C_1$  的中点,  $AA_1 = AB$ , 平面  $A_1BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 求二面角  $A - BD - C$  的正弦值.

【解析】(1) 设  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离为  $h$ ,

$$V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3},$$

$$V_{A-A_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h,$$

所以  $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \cdot h = \frac{4}{3}$ , 所以  $h = \sqrt{2}$ , 所以  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离为  $\sqrt{2}$ .

(3) 取  $A_1B$  的中点  $E$ , 连接  $AE$ ,

因为  $AA_1 = AB$ , 所以  $AE \perp A_1B$ .

因为平面  $A_1BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 平面  $A_1BC \cap$  平面  $ABB_1A_1 = A_1B$ ,

所以  $AE \perp$  平面  $A_1BC$ ,  $AE = \sqrt{2}$ , 则  $AA_1 = AB = 2$ , 所以  $AE \perp BC$ ,

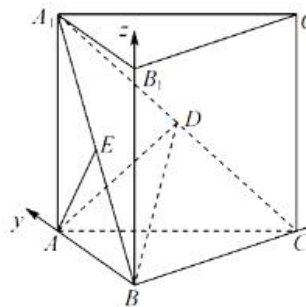
因为直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$ , 所以  $A_1A \perp BC$ ,

因为  $AE \cap A_1A = A$ , 所以  $BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 所以  $BC \perp AB$ ,

由  $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot A_1A = \frac{1}{2} \times 2 \times BC \times 2 = 4$ , 所以  $BC = 2$ ,

以  $BC$  为  $x$  轴,  $BA$  为  $y$  轴,  $BB_1$  为  $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

所以  $B(0,0,0)$ ,  $A(0,2,0)$ ,  $C(2,0,0)$ ,  $A_1(0,2,2)$ ,  $E(0,1,1)$ ,  $D(1,1,1)$



平面  $BDC$  的法向量设为  $\vec{n}_1 = \vec{AE} = (0, -1, 1)$ , 平面  $BDA$  的法向量设

为  $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ ,

$$\vec{BA} = (0, 2, 0), \vec{BD} = (1, 1, 1),$$

$$\begin{cases} \vec{BA} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \vec{BD} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } y = 0,$$

设  $x=1$ , 则  $z=-1$ , 所以  $\vec{n}_2 = (1, 0, -1)$ , 所以  $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = -\frac{1}{2}$ ,

设二面角  $A-BD-C$  的平面角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

所以二面角  $A-BD-C$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

20. (12分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人,  $A$  表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”,  $B$  表示事件“选到的人患有该疾病”,

$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$  与  $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$  的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险

程度的一项度量指标, 记该指标为  $R$ .

(i) 证明:  $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(A|\bar{B})}{P(\bar{A}|\bar{B})}$ ;

(ii) 利用该调查数据, 给出  $P(A|B), P(A|\bar{B})$  的估计值, 并利用(i)的结果给出  $R$  的估计值.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c|c|c|c} P(K^2 \geq k) & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \end{array}$$

【解析】(1) 假设患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯没有差异,

$$\text{则 } K^2 = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24 > 10.828,$$

所以有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异;

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (i) } R &= \frac{P(B|A) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}}{\frac{P(A\bar{B})}{P(A)} \cdot \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}} = \frac{P(AB)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(B\bar{A})} \\
 &= \frac{P(AB)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(B\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(B\bar{A})} = \frac{P(A|B)}{P(A|\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)}, \text{ 得证;}
 \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ 由调查数据可知 } P(A|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$\text{则 } P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{3}{5}, \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{9}{10}, \quad \text{所以 } R = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}} = 6.$$

21. (12分)

已知点  $A(2,1)$  在双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$  上, 直线  $l$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 直线

$AP, AQ$  的斜率之和为 0.

(1) 求  $l$  的斜率;

(2) 若  $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ , 求  $\triangle PAQ$  的面积.

**【答案】** (1)  $l$  的斜率为 0; (2)  $\triangle PAQ$  的面积为  $\frac{16\sqrt{2}}{9}$

**【解析】** (1) 将点  $A$  代入双曲线方程得  $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$ , 化简得  $a^4 - 4a^2 + 4 = 0$  得:

$$a^2 = 2, \text{ 故双曲线方程为 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1;$$

由题显然直线  $l$  的斜率存在, 设  $l: y = kx + m$ , 设  $P(x_1, y_1) Q(x_2, y_2)$ , 则联立直线与

$$\text{双曲线得: } (2k^2 - 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 + 2 = 0,$$

$$\text{故 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 - 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 2}{2k^2 - 1},$$

$$k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2 - 2} = 0,$$

化简得:  $2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0$ ,

$$\text{故 } \frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1} + (m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right) - 4(m-1) = 0,$$

即  $(k+1)(m+2k-1) = 0$ , 而直线  $l$  不过  $A$  点, 故  $k = -1$ .

(2) 设直线  $AP$  的倾斜角为  $\alpha$ , 由  $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ , 得  $\tan \frac{\angle PAQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

由  $2\alpha + \angle PAQ = \pi$ , 得  $k_{AP} = \tan \alpha = \sqrt{2}$ , 即  $\frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}$ ,

$$\text{联立 } \frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}, \text{ 及 } \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1 \text{ 得 } x_1 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{2}-5}{3},$$

代入直线  $l$  得  $m = \frac{5}{3}$ , 故  $x_1+x_2 = \frac{20}{3}$ ,  $x_1x_2 = \frac{68}{9}$

$$\text{而 } |AP| = \sqrt{3}|x_1-2|, |AQ| = \sqrt{3}|x_2-2|,$$

由  $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ , 得  $\sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\text{故 } S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2}|AP||AQ|\sin \angle PAQ = \sqrt{2}|x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4| = \frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax$  和  $g(x) = ax - \ln x$  有相同的最小值

(1) 求  $a$ ;

(2) 证明: 存在直线  $y = b$ , 其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点,

并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【解析】(1)  $f'(x) = e^x - a$ ,  $g'(x) = a - \frac{1}{x}$

①  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立, 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 即  $f(x)$  没有最小值.

该类情况应舍去.

②  $a > 0$  时,  $f'(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上小于 0, 在  $(\ln a, +\infty)$  上大于 0,



所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)$  在  $x = \ln a$  处有最小值为  $f(\ln a) = a - a \ln a$ ,

所以  $g'(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上小于 0, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上大于 0,

所以  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递增,

所以  $g(x)$  在  $x = \frac{1}{a}$  处有最小值为  $g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$ ,

因为  $f(x) = e^x - ax$  和  $g(x) = ax - \ln x$  有相同的最小值

所以有  $f(\ln a) = a - a \ln a = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$ , 即  $a - a \ln a = 1 + \ln a$

因为  $a > 0$ , 所以上式等价于  $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$ ,

令  $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} (x > 0)$ ,

则  $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$  恒成立, 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增

又因为  $h(1) = 0 = h(a)$  且  $a > 0$ , 所以  $a = 1$

(2) 证明: 由 (1)  $f(x) = e^x - x$ ,  $g(x) = x - \ln x$ ,

且  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1$ .

①  $b < 1$  时, 此时  $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$ , 显然  $y = b$  与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$

共有 0 个交点, 不符合题意;

②  $b = 1$  时, 此时  $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$ ,  $y = b$  与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有

2 个交点, 交点的横坐标分别为 0 和 1;

③  $b > 1$  时, 首先, 证明  $y = b$  与曲线  $y = f(x)$  有 2 个交点:

即证明  $F(x) = f(x) - b$  有 2 个零点,  $F'(x) = f'(x) = e^x - 1$ ,

所以  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

又因为  $F(-b) = e^{-b} > 0$ ,  $F(0) = 1 - b < 0$ ,  $F(b) = e^b - 2b > 0$ ,

(令  $t(b) = e^b - 2b$ , 则  $t'(b) = e^b - 2 > 0$ ,  $t(b) > t(1) = e - 2 > 0$ )

所以明  $F(x) = f(x) - b$  在  $(-\infty, 0)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_1$ , 在  $(0, +\infty)$  上存在

且只存在 1 个零点, 设为  $x_2$ .

其次, 证明  $y = b$  与曲线有 2 个交点:

即证明  $G(x) = g(x) - b$  有 2 个零点,  $G'(x) = g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ .

所以  $G(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

又因为  $G(e^{-b}) = e^{-b} > 0$ ,  $G(0) = 1 - b < 0$ ,  $G(2b) = b - \ln 2b > 0$ ,

(令  $\mu(b) = b - \ln 2b$ , 则  $\mu'(b) = 1 - \frac{1}{b} > 0$ ,  $\mu(b) > \mu(1) = 1 - \ln 2 > 0$ )

所以  $F(x) = f(x) - b$  在  $(0, 1)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_3$ , 在  $(1, +\infty)$  上存在且只

存在 1 个零点, 设为  $x_4$ .

再次, 证明存在  $b$  使得  $x_2 = x_3$ :

因为  $F(x_2) = G(x_3) = 0$ , 所以  $b = e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$ ,

若  $x_2 = x_3$ , 则  $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$ , 即  $e^{x_2} - 2x_2 + \ln x_2 = 0$ ,

所以只需证明  $e^x - 2x + \ln x = 0$  在  $(0, 1)$  上有解即可,

即  $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$  在  $(0, 1)$  上有零点,

因为  $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right) = e^{\frac{1}{e^3}} - \frac{2}{e^3} - 3 < 0$ ,  $\varphi(1) = e - 2 > 0$ ,

所以  $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$  在  $(0, 1)$  上存在零点, 取一零点为  $x_0$ , 令  $x_2 = x_3 = x_0$  即可,

此时取  $b = e^{x_0} - x_0$

则此时存在直线  $y = b$ ，其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点

**最后**证明  $x_1 + x_4 = 2x_0$ ，即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列：

因为  $F(x_1) = F(x_2) = F(x_0) = 0 = G(x_3) = G(x_0) = G(x_4)$ 。

所以  $F(x_1) = G(x_0) = F(\ln x_0)$ 。

又因为  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减， $x_1 < 0$ ， $0 < x_0 < 1$  即  $\ln x_0 < 0$ ，所以  $x_1 = \ln x_0$ 。

同理，因为  $F(x_0) = G(e^{x_0}) = G(x_4)$ 。

又因为  $G(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增， $x_0 > 0$  即  $e^{x_0} > 1$ ， $x_4 > 1$ ，所以  $x_4 = e^{x_0}$ 。

又因为  $e^{x_0} - 2x_0 + \ln x_0 = 0$ ，所以  $x_1 + x_4 = e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$ 。

即直线  $y = b$ ，与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。