

$b_1 > b_3$, 又因为 $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}$, 故 $b_2 < b_4$; 于是得 $b_1 > b_3 > b_5 > b_7 > \dots$, 排除 A,

$\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_6}}}$, 故 $b_2 < b_6$, 排除 C, 而 $b_1 > b_7 > b_8$, 排除 B. 故选择 D.

方法二: (取特殊值) 取 $a_n = 1$, 于是有 $b_1 = 2, b_2 = \frac{3}{2}, b_3 = \frac{5}{3}, b_4 = \frac{8}{5}, \dots$,

分子分母分别构成斐波那契数列, 于是有 $b_5 = \frac{13}{8}, b_6 = \frac{21}{13}, b_7 = \frac{34}{21}, b_8 = \frac{55}{34}$.

于是得 $b_1 > b_5, b_3 = 1 + \frac{2}{3} > 1 + \frac{22}{33} > 1 + \frac{21}{34} = b_8, b_6 = 1 + \frac{8}{13} > 1 + \frac{1}{2} = b_2$. 对比选项, 选 D.

5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3,0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

解析: 易知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,

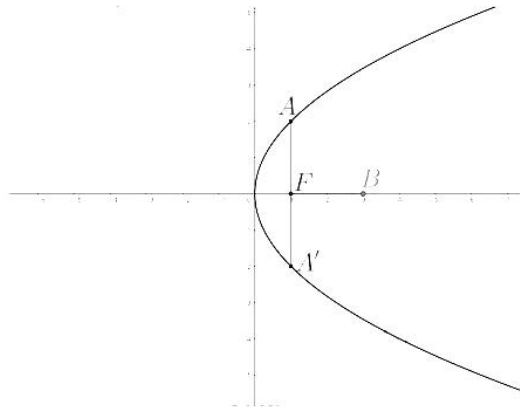
于是有 $|BF| = 2$, 故 $|AF| = 2$, 注意到

抛物线通径 $2p = 4$, 通径为抛物线

最短的焦点弦, 分析知 AF 必为

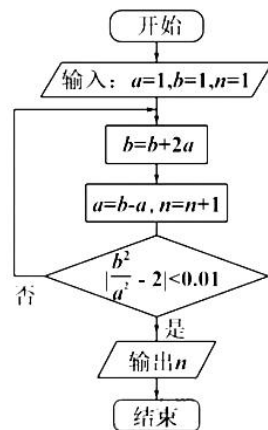
半焦点弦, 于是有 $AF \perp x$ 轴,

于是有 $|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.



6. 执行右边的程序框图, 输出的 $n =$

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6



【答案】B

【解析】

第一次循环： $b = 1 + 1 \times 2 = 3$ ， $a = 3 - 1 = 2$ ， $n = 1 + 1 = 2$ ， $|\frac{b^2}{a^2} - 2| = |(\frac{3}{2})^2 - 2| = \frac{1}{4} > 0.01$

第二次循环： $b = 3 + 2 \times 2 = 7$ ， $a = 7 - 2 = 5$ ， $n = 2 + 1 = 3$ ， $|\frac{b^2}{a^2} - 2| = |(\frac{7}{5})^2 - 2| = \frac{1}{25} > 0.01$

第三次循环： $b = 7 + 2 \times 5 = 17$ ， $a = 17 - 5 = 12$ ， $n = 3 + 1 = 4$ ， $|\frac{b^2}{a^2} - 2| = |(\frac{17}{12})^2 - 2| = \frac{1}{144} < 0.01$

故输出 $n = 4$

故选 B

7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AB, BC 的中点，则

A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC

D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

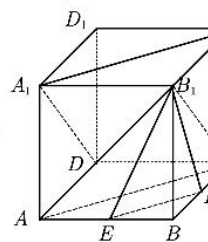
【解析】

对于 A 选项：在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 EF 分别为 AB, BC 的中点，易知 $EF \perp BD$ ，从而 $EF \perp$ 平面 BDD_1 ，又因为 $EF \subset$ 平面 BDD_1 ，所以平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 ，所以 A 选项正确；

对于 B 选项：因为平面 $A_1BD \cap$ 平面 $BDD_1 = BD$ ，由上述过程易知平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD 不成立；

对于 C 选项：由题意知直线 AA_1 与直线 B_1E 必相交，故平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC 有公共点，从而 C 选项错误；

对于 D 选项：连接 AC, AB_1, B_1C ，易知平面 $AB_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D ，又因为平面 AB_1C 与平面 B_1EF 有公共点 B_1 ，故平面 AB_1C 与平面 B_1EF 不平行，所以 D 选项错误。



8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168， $a_2 - a_5 = 42$ ，则 $a_6 =$

A. 14 B. 12 C. 6 D. 3

【答案】D

【解析】

设等比数列 $\{a_n\}$ 首项 a_1 ，公比 q

由题意, $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 168 \\ a_2 - a_3 = 42 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 168 \\ a_1q(1-q^3) = 42 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 168 \\ a_1q(1-q)(1+q+q^2) = 42 \end{cases}$

解得, $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 96$, 所以 $a_6 = a_1q^5 = 3$

故选 D

9. 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O , 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

考虑与四棱锥的底面形状无关, 不是一般性, 假设底面是边长为 a 的正方形, 底面所在圆面的半径为 r , 则 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

所以该四棱锥的高 $h = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$, 所以体积

$$V = \frac{1}{3}a^2\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4} \frac{a^2}{4} (1 - \frac{a^2}{2})} \leq \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 1 - \frac{a^2}{2}}{3}\right)^3} = \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{4}{9}$$

当且仅当 $\frac{a^2}{4} = 1 - \frac{a^2}{2}$, 即 $a^2 = \frac{4}{3}$ 时, 等号成立

$$\text{所以该四棱锥的高 } h = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

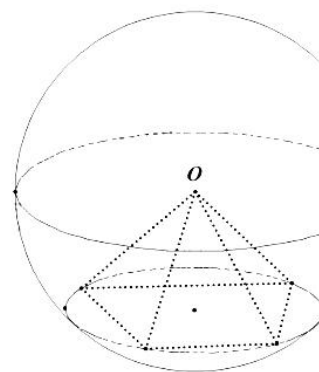
故选 C

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p , 则

- A. p 与该棋手和甲, 乙, 丙的比赛次序无关
 B. 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大
 C. 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大
 D. 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大

【答案】D

【解析】



设棋手在第二盘与甲比赛连赢两盘的概率为 $P_{\text{甲}}$ ，在第二盘与乙比赛连赢两盘的概率为 $P_{\text{乙}}$ ，在第二盘与丙比赛连赢两盘的概率为 $P_{\text{丙}}$

由题意

$$P_{\text{甲}} = p_1[p_2(1-p_3) + p_3(1-p_2)] = p_1p_2 + p_1p_3 - 2p_1p_2p_3$$

$$P_{\text{乙}} = p_2[p_1(1-p_3) + p_3(1-p_1)] = p_1p_2 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$

$$P_{\text{丙}} = p_3[p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)] = p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$

$$\text{所以 } P_{\text{丙}} - P_{\text{甲}} = p_2(p_3 - p_1) > 0, \quad P_{\text{丙}} - P_{\text{乙}} = p_1(p_3 - p_2) > 0$$

所以 $P_{\text{丙}}$ 最大，故选 D.

11. 双曲线 C 的两个焦点 F_1, F_2 ，以 C 的实轴为直径的圆记为 D ，过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点，且 $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$ ，则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

【答案】C

【解析】由题意，点 N 在双曲线右支. 记切点为点 A ，连接 OA ，则 $OA \perp MN$ ， $|OA| = a$ ，

又 $|OF_1| = c$ ，则 $|AF_1| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$. 过点 F_2 作 $F_2B \perp MN$ 交直线 MN 于点 B ，连接 F_2N ，

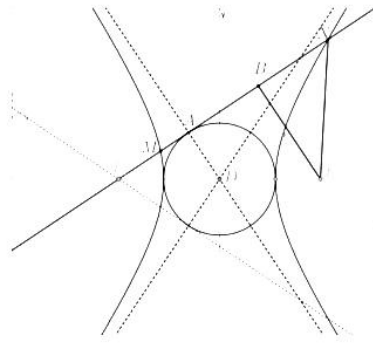
则 $F_2B \parallel OA$ ，又点 O 为 F_1F_2 中点，则 $|F_2B| = 2|OA| = 2a$ ， $|F_1B| = 2|AF_1| = 2b$. 由

$$\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}, \quad \text{得 } \sin \angle F_1NF_2 = \frac{4}{5}, \quad \tan \angle F_1NF_2 = \frac{4}{3},$$

$$\text{所以 } |F_2N| = \frac{|F_2B|}{\sin \angle F_1NF_2} = \frac{5a}{2}, \quad |BN| = \frac{|F_2B|}{\tan \angle F_1NF_2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{故 } |F_1N| = |F_1B| + |BN| = 2b + \frac{3a}{2}, \quad \text{由双曲线定义, } |F_1N| - |F_2N| = 2a,$$

$$\text{则 } 2b - a = 2a, \quad \text{即 } \frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad \text{所以 } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$



12. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbb{R} , 且 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$.

若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$

- A. -21 B. -22 C. -23 D. -24

【答案】D

【解析】若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, 则 $g(2-x) = g(2+x)$, 因为 $f(x) + g(2-x) = 5$, 所以 $f(-x) + g(2+x) = 5$, 故 $f(-x) = f(x)$, $f(x)$ 为偶函数. 由 $g(2) = 4$, $f(0) + g(2) = 5$, 得 $f(0) = 1$. 由 $g(x) - f(x-4) = 7$, 得 $g(2-x) = f(-x-2) + 7$, 代入 $f(x) + g(2-x) = 5$, 得 $f(x) + f(-x-2) = -2$, $f(x)$ 关于点 $(-1, -1)$ 中心对称, 所以 $f(1) = f(-1) = -1$. 由 $f(x) + f(-x-2) = -2$, $f(-x) = f(x)$, 得 $f(x) + f(x+2) = -2$, 所以 $f(x+2) + f(x+4) = -2$, 故 $f(x+4) = f(x)$, $f(x)$ 周期为 4. 由 $f(0) + f(2) = -2$, 得 $f(2) = -3$, 又 $f(3) = f(-1) = f(1) = -1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 6f(1) + 6f(2) + 5f(3) + 5f(4) = 11 \times (-1) + 5 \times 1 + 6 \times (-3) = -24$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】设“甲、乙都入选”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$.

14. 过四点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 中的三点的圆的方程为_____

【答案】 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 或 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ 或

$\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$

【解析】设点 $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(-1,1)$, $D(4,2)$, 圆过其中三点共有四种情况, 解决办

法是两条中垂线的交点为圆心，圆心到任一点的距离为半径。

(1) 若圆过 A、B、C 三点，则圆心在直线 $x = 2$ ，设圆心坐标为 $(2, a)$ ，则

$$4 + a^2 = 9 + (a-1)^2 \Rightarrow a = 3, r = \sqrt{4 + a^2} = \sqrt{13},$$

$$\text{所以圆的方程为 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$$

(2) 若圆过 A、B、D 三点，同 (1) 设圆心坐标为 $(2, a)$ ，则

$$4 + a^2 = 4 + (a-2)^2 \Rightarrow a = 1, r = \sqrt{4 + a^2} = \sqrt{5}, \text{ 所以圆的方程为 } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

(3) 若圆过 A、C、D 三点，则线段 AC 的中垂线方程为 $y = x + 1$ ，线段 AD 的中垂线方程

$$\text{为 } y = -2x + 5, \text{ 联立得 } \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{65}}{3},$$

$$\text{所以圆的方程为 } \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$$

(4) 若圆过 B、C、D 三点，则线段 BD 的中垂线方程为 $y = 1$ ，

$$\text{线段 BC 中垂线方程为 } y = 5x - 7, \text{ 联立得 } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{8}{5} - 4\right)^2 + 1} = \frac{13}{5},$$

$$\text{所以圆的方程为 } \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$$

15、记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T ，若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为 _____

【答案】3

【解析】 $f(T) = f(0) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且 $0 < \varphi < \pi$ ，故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \omega = 3 + 9k (k \in \mathbb{Z}),$$

又 $\omega > 0$ ，故 ω 的最小值为 3.

16、已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点，若 $x_1 < x_2$ ，则 a 的取值范围是_____

【答案】 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

【解析】 $f'(x) = 2(a^x \ln a - ex)$ 至少要有两个零点 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ，我们对其求导，

$$f''(x) = 2a^x(\ln a)^2 - 2e,$$

(1) 若 $a > 1$ ，则 $f''(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增，此时若 $f''(x_0) = 0$ ，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点，则 $x_1 > x_2$ ，不符合题意。

(2) 若 $0 < a < 1$ ，则 $f''(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，此时若 $f''(x_0) = 0$ ，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减，且 $x_0 = \log_a \frac{e}{(\ln a)^2}$ 。此时若有 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点，且 $x_1 < x_2$ ，则需满足 $f'(x_0) > 0$ ，即

$$\frac{e}{\ln a} > e \log_a \frac{e}{(\ln a)^2} \Rightarrow a^{\frac{1}{\ln a}} > \frac{e}{(\ln a)^2} \Rightarrow \ln a^{\frac{1}{\ln a}} > \ln \frac{e}{(\ln a)^2} \Rightarrow \frac{1}{\ln a} \ln a > 1 - \ln(\ln a)^2,$$

可解得 $a > e$ 或 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，由于 $0 < a < 1$ ，取交集即得 $0 < a < \frac{1}{e}$ 。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知

$$\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A).$$

(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

(2) 若 $a = 5$, $\cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】 (1) 见证明过程; (2) 14;

【解析】 1. 已知 $\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$ 可化简为

$$\sin C \sin A \cos B - \sin C \cos A \sin B = \sin B \sin C \cos A - \sin B \cos C \sin A,$$

由正弦定理可得 $ac \cos B - bc \cos A = bc \cos A - ab \cos C$, 即 $ac \cos B = 2bc \cos A - ab \cos C$,

由余弦定理可得 $ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 即证 $2a^2 = b^2 + c^2$,

(2) 由(1)可知 $b^2 + c^2 = 2a^2 = 50$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{50 - 25}{2bc} = \frac{25}{2bc} = \frac{25}{31}$, $\therefore 2bc = 31$,

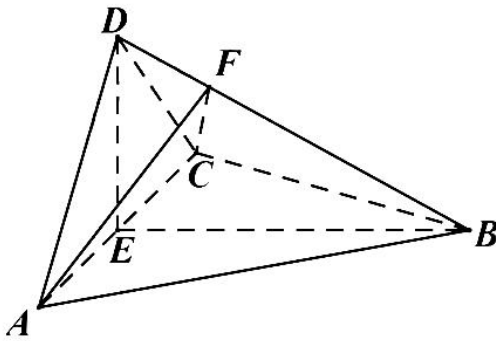
$\therefore b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2 = 81$, $\therefore b + c = 9$, $\therefore a + b + c = 14$, $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 14

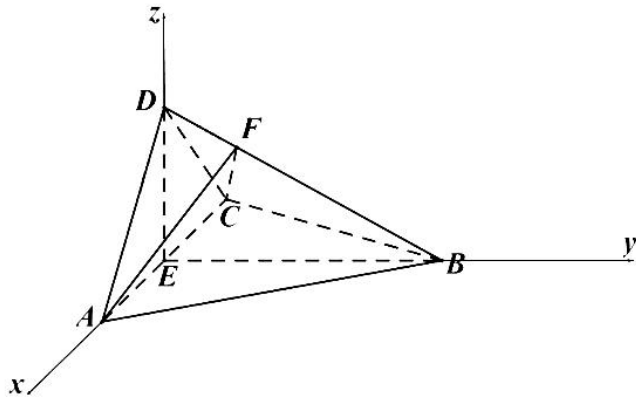
18. (12分)

如图, 四面体 $ABCD$ 中 $AD \perp CD$, $AD = CD$, $\angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 中点.

(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2$, $\angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值.





解析: (1) $\because AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$ 且 BD 为公共边 $\therefore \triangle ADB$ 与 $\triangle BDC$ 全等,

$\therefore AB = BC$.

又 $\because E$ 为 AC 中点 且 $AD = CD, \therefore DE \perp AC$, 同理 $BE \perp AC$.

又 $\because DE \cap BE = E$, 且均含于平面 BED ,

$\therefore AC \perp$ 平面 BED .

又 $\because AC \subset$ 平面 ACD, \therefore 平面 $BED \perp$ 平面 ACD .

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, \angle ACB = 60^\circ, AB = BC \therefore AC = 2, BE = \sqrt{3}$.

在 $\triangle ACD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, AC = 2, E$ 为 AC 中点, $\therefore DE \perp AC, DE = 1$.

又 $\because BD = 2, \therefore DE^2 + BE^2 = BD^2$, 即 $DE \perp BE$.

\therefore 直线 AC 、直线 ED 、直线 EB 两两互相垂直.

由点 F 在 BD 上且 $\triangle ADB$ 与 $\triangle BDC$ 全等, $\therefore AF = FC$,

由于 E 为 AC 中点 $\therefore EF \perp AC$

当 $\triangle AFC$ 的面积最小时 $\therefore EF \perp BD$

在 $Rt\triangle DEB$ 中, $\because BE = \sqrt{3}, DE = 1 \therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2}, BF = \frac{3}{2}$

如图, 以点 E 为坐标原点, 直线 AC 、 EB 、 ED 分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系.

$C(-1, 0, 0)$ 、 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, \sqrt{3}, 0)$ 、 $D(0, 0, 1)$ 、 $F(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$

$$\overline{BD} = (0, -\sqrt{3}, 1), \overline{AD} = (-1, 0, 1), \overline{BC} = (-1, -\sqrt{3}, 0)$$

$$\therefore \overline{CF} = \overline{BF} - \overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{BD} - \overline{BC} = (1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$$

设平面 ABD 的法向量为 $\overline{m} = (x, y, z)$

$$\text{可得} \begin{cases} \overline{BD} \cdot \overline{m} = 0 \\ \overline{AD} \cdot \overline{m} = 0 \end{cases} \text{ 设 } y = 1 \therefore \overline{m} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$$

设 \overline{m} 与 \overline{CF} 所成的角为 α , CF 与平面 ABD 所成角为 θ

$$\therefore \sin \theta = |\cos \alpha| = \frac{|\overline{m} \cdot \overline{CF}|}{|\overline{m}| \cdot |\overline{CF}|} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

所以 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

19. (12分) 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山, 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.6

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);
- (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186 m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附：相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

【答案】 (1) 0.06, 0.39; (2) 0.97; (3) 1209

【答案】 (1) 0.06, 0.39; (2) 0.97; (3) 1209

【解析】 (1) 设这种树木平均一棵的根部横截面积为 \bar{x} , 平均一个的材积量为 \bar{y} ,

则 $\bar{x} = \frac{0.6}{10} = 0.06$, $\bar{y} = \frac{3.9}{10} = 0.39$.

$$(2) r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}} = \frac{0.2474 - 10 \times 0.06 \times 0.39}{\sqrt{(0.038 - 10 \times 0.06^2) \sqrt{(1.6158 - 10 \times 0.39^2)^2}}}$$

$$= \frac{0.0134}{\sqrt{0.002 \times 0.0948}} = \frac{0.0134}{0.01 \times \sqrt{1.896}} = \frac{0.0134}{0.01377} = 0.97$$

(3) 设从根部面积总和为 X , 总材积量为 Y , 则 $\frac{X}{Y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$, 故 $Y = \frac{3.9}{0.6} \times 186 = 1209$ (m^3).

20. (12分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴, y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点。

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 的直线与线段 AB

交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 证明: 直线 HN 过定点.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) 直线 HN 过定点 $(0, -2)$

【解析】 (1) 设 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 将 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点代入得

$$\begin{cases} \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{解得 } a^2 = 3, b^2 = 4, \text{故 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 由 $A(0, -2)$, $B(\frac{3}{2}, -1)$ 可得直线 $AB: y = \frac{2}{3}x - 2$

①若过 $P(1, -2)$ 的直线的斜率不存在, 直线为 $x=1$ 。代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, 可得 $M(1, \frac{2\sqrt{6}}{3})$,

$N(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 将 $y = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $AB: y = \frac{2}{3}x - 2$, 可得 $T(\sqrt{6} + 3, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, 由 $\overline{MT} \perp \overline{HN}$,

得 $H(2\sqrt{6} + 5, \frac{2\sqrt{6}}{3})$ 。易求得此时直线 $HN: y = (2 - \frac{2\sqrt{6}}{3})x - 2$ 。过点 $(0, -2)$ 。

②若过 $P(1, -2)$ 的直线的斜率存在, 设 $kx - y - (k+2) = 0$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 。

$$\text{联立} \begin{cases} kx - y - (k+2) = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3k^2 + 4)x^2 - 6k(2+k)x + 3k(k+4) = 0$$

$$\text{故有} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6k(2+k)}{3k^2 + 4} \\ x_1 x_2 = \frac{3k(4+k)}{3k^2 + 4} \end{cases}, \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-8(2+k)}{3k^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2 + 4} \end{cases}, \text{ 且 } x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{-24k}{3k^2 + 4} \quad (*)$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = y_1 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}, \text{ 可得 } T(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1), H(3y_1 + 6 - x_1, y_1),$$

$$\text{可求得此时 } HN: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3y_1 + 6 - x_1 - x_2}(x - x_2)$$

将 $(0, -2)$ 代入整理得 $2(x_1 + x_2) - 6(y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3y_1 y_2 - 12 = 0$

将 $(*)$ 式代入, 得 $24k + 12k^2 + 96 + 48k - 24k - 48 - 48k + 24k^2 - 36k^2 - 48 = 0$,

显然成立。

综上, 可得直线 HN 过定点 $(0, -2)$ 。

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y=2x$; (2) $a < -1$.

【解析】 详解请扫描二维码, 微信群获取

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点,

x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + m = 0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求 m 的取值范围.

答案: (1) $\sqrt{3}x + y + 2m = 0$; (2) $-\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

解析: (1) 由 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + m = 0$ 可得, $\rho \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) + m = 0$,

即 $\rho \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) + m = 0$, $\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + m = 0$,

故 l 的方程为: $\sqrt{3}x + y + 2m = 0$.

(2) 由 $x = \sqrt{3} \cos 2t$, 得 $x = \sqrt{3}(1 - 2 \sin^2 t) = \sqrt{3} \left[1 - 2 \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right] = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} y^2$,

联立 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} y^2 \\ \sqrt{3}x + y + 2m = 0 \end{cases}$, $3y^2 - 2y - 4m - 6 = 0$,

即 $3y^2 - 2y - 6 = 4m(-2 \leq y \leq 2)$, $-3 \leq \frac{4m}{\sqrt{3}} \leq 6$, 即 $-\frac{19}{3} \leq 4m \leq 10$, $-\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}$

故 m 的范围是 $-\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

23. [选修 4-5: 不等式] (10 分) ♪

已知 a, b, c 为正数, 且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$, 证明: ♪

(1) $abc \leq \frac{1}{9}$ ♪

(2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ♪

(1) 证明: 因为 a, b, c 为正数, 所以 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} \geq 3\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt{abc}$, 当且仅当 $a = b = c = 3^{-\frac{2}{3}}$ 时取 等号, 所以 $3\sqrt{abc} \leq 1$, 即 $abc \leq \frac{1}{9}$, ♪

得证. ♪

(1) 要证 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ 成立, 只需证 $\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac}}{a+c} + \frac{c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$, ♪

又因为 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b = c = 3^{-\frac{2}{3}}$ 时, 同时取等, ♪

所以 $\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc} + b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac} + c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{b+c} \leq \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac}}{2\sqrt{ac}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$, ♪

得证. ♪